Taller de Matemáticas IV

Temario

Semana 1

Sesión 1

Los temas a revisar el día de hoy son:

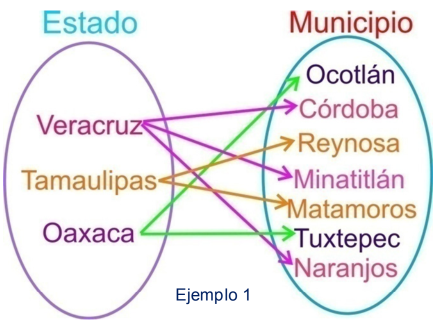
1. Funciones
  1.1. Características de la relación y de la función
    1.1.1. Formas de representar a una función
    1.1.2. Dominio y rango de una función
  1.2. Operaciones con funciones

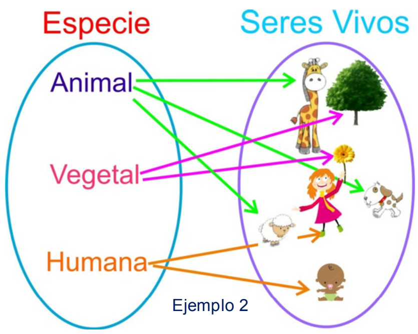
1. Funciones
  1.1. Características de la relación y de la función

Botellas plásticas PET
Sabías que…
Del PET (tereftalato de polietileno) se crean botellas transparentes y brillantes de color cristal o verde, que han sido consideradas a nivel internacional como envases de excelencia por sus características: su producción es de bajo consumo de energía, no contiene ***<u>halógenos</u>*** *y son completamente reciclables.*
En México este material se comenzó a utilizar a mediados de la década de los ochenta. Dichos envases plásticos tardan en degradarse de 500 a 1,000 años.

- Si en su mayoría los habitantes del país optan, por cuestiones prácticas, el uso de botellas plásticas, ¿qué cantidad de botellas plásticas crees que se desechan diariamente en todo México?
  ¿A dónde van a parar tantas botellas plásticas?

Las preguntas del ejemplo anterior son de suma importancia para el bien de todos los seres vivos que habitamos la Tierra; para conocer un estimado del grado de gravedad del asunto, el objeto en cuestión está en referencia o **relación** a otros factores, por ejemplo, el tiempo de degradación, la cantidad fabricada o consumida por día, el grado perjudicial, etc.
Formalmente se puede decir que ***una relación es un proceso de <u>correspondencia</u> que existe entre los elementos de dos conjuntos de objetos o fenómenos,*** como se acaba de mencionar por ejemplo, la relación entre la cantidad de botellas desechadas y el tiempo que tardan en degradarse, además existen muchos otros ejemplos de una relación como los siguientes diagramas de flechas:



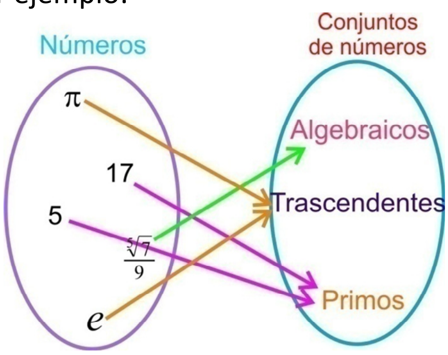


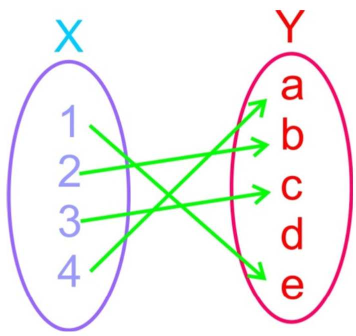
En el ejemplo 1 la relación o correspondencia se da entre los elementos del conjunto de los estados con los elementos del conjunto de los municipios, los elementos de ambos conjuntos establecen una relación entre sí, dicha relación está señalada mediante una flecha, para visualizar inmediatamente su correspondencia, además podrás observar que algunos elementos tienen correspondencia con más de uno de los elementos del otro conjunto.

En tu vida cotidiana y en tu entono puedes encontrar múltiples objetos o fenómenos que están en relación unos con otros. Dentro de estas múltiples relaciones también se podría considerar la relación de un padre con su hijo, de una madre con su hijo, etc. ***¿Qué diferencia hay entre este tipo de relación y las del ejemplo anterior?***

Ciertamente la relación que existe entre un padre y su hijo es una relación única, ***¿por qué?*** porque cada persona tiene un sólo padre biológico y una sola madre biológica, este tipo de relación se le conoce como una función.
En términos formales puedes concluir que una **función es una relación entre los elementos de dos conjuntos, dentro de los cuales existe una correspondencia única; es decir, a cada elemento de un primer conjunto, le corresponde uno y sólo uno de los elementos del segundo conjunto.**

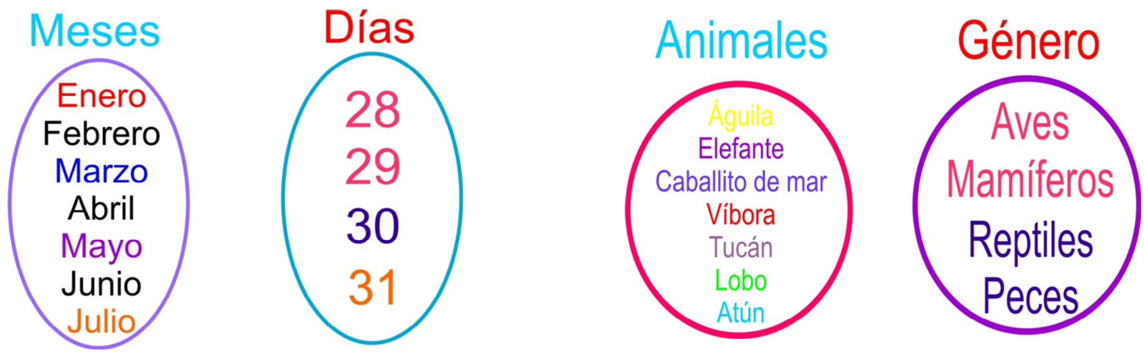
Por ejemplo:





Práctica 1

Resuelve lo siguiente y traza la correspondencia correcta que existe entre los elementos del primer conjunto con los del segundo e identifica cuál de los dos es función:



1.1.1. Formas de representar una función

Ya conoces una forma de representar una relación o función, ésta trata de la agrupación mediante diagramas de flechas, y seguramente recordaste otras, entre ellas se podrían mencionar las que se representan a través de un lenguaje verbal, de parejas ordenadas, tablas, gráficas, ecuaciones, etc.

- ***¿Qué diferencia hay entre cada una de las múltiples representaciones de una función o relación?***
- ***¿Cómo identificas una función en un lenguaje verbal?***
- ***¿Y en una ecuación o gráfica?***
- ***¿Cuál de todas las formas anteriores es más práctica para identificar visualmente una función?***
- ***¿Toda relación es función?***
- ***¿Toda función es una relación?***

Para responder todas estas cuestiones necesitas conocer cada una de las diferentes formas en que se puede representar a una función o relación y saber cómo identificarlas.

Forma verbal

La forma verbal consiste en enunciar a través de una oración una relación o función con características específicas, por ejemplo: una estilista necesita obtener la proporción entre el alto y ancho del cuello de una camiseta para caballero, hecha con PET reciclado, al final obtuvo la siguiente conclusión:

“El cuadrado del ancho menos 9 centímetros es el triple de lo alto”.

Ahora, ***¿cómo lograrías identificar si el enunciado anterior es una función?*** Para determinar lo anterior necesitas interpretar numéricamente su forma verbal, es decir, conocer su forma algebraica.

Forma algebraica

En algunos casos la forma verbal se puede representar mediante una forma algebraica o ecuación, esta forma algebraica o ecuación involucra variables desconocidas relacionadas entre sí mediante algunas operaciones.

Del ejemplo en desarrollo, cuya forma verbal es:

"El cuadrado del ancho menos 9 centímetros es el triple de lo alto".
Su correspondiente forma algebraica es del tipo:
$(x - 9)^2 = 3y$, en donde "x" representa el ancho *y* "y" representa la altura.

Si consideras a la "x" como la **variable independiente** y en su defecto a la variable "y" como la **variable dependiente**, existe una manera distinta de representar mediante una ecuación una función considerando la relación de dependencia e independencia de una con la otra, uno de los requisitos es que la variable dependiente esté despejada, si despejas de la ecuación anterior la variable dependiente te queda lo siguiente: $y = (x - 9)^2 / 3$.

Ahora, la ecuación bajo la forma siguiente: $f(x) = (x - 9)^2 / 3$ es una nueva manera de representar una función, en donde f(x) no es una multiplicación de "f" por "x" sino que f(x) representa a la variable dependiente, es decir f(x) = y. Además puedes observar que la variable que se encuentra entre paréntesis es identificada como la variable independiente de la ecuación.

La letra f, g, h son unas de las letras más comunes que se usan para representar una relación funcional o no funcional.
Ahora, ***¿cómo lograrías identificar si la ecuación anterior es una función?*** Para determinar lo anterior necesitas conocer la correspondencia entre los valores de "x" *y* "y", para esto necesitas elaborar una tabla de valores, por lo tanto, conocer su forma tabular.

Forma tabular

La forma tabular se usa para representar mediante una tabla la correspondencia entre los valores de dos conjuntos y mediante la cual se puede identificar si la correspondencia de relación es o no una función.

Así pues, para realizar una tabla de valores correspondiente a la ecuación $(x - 9)^2 = 3y$ es necesario que asignes valores (dentro de los números reales) a la variable independiente "x", y obtener mediante los mismos valores su correspondiente valor de la variable dependiente "y".

En la ecuación: $(x - 9)^2 / 3 = f(x)$ Si x = 6 Obtén el valor de "y"
1) Sustituyes el valor de "x" en la ecuación: $f(6) = (6 - 9)^2 / 3$
2) Simplificas: $f(6) = (-3)^2 / 3$
3) Resuelves la operación: $f(6) = 9 / 3$
4) Obtienes el valor de "y": $f(6) = 3$

De la misma manera obtienes el resto de los valores correspondientes de "y" para los valores de "x" en, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Ya que realizaste las operaciones correspondientes, obtuviste los valores de la variable dependiente a partir de los valores asignados a la variable independiente, resultándote así los siguientes datos:

Ecuación:
$f(x) = (x - 9)^2 \ / 3$

"x"	f(x) = y
6	**3**
7	**1.3**
8	**0.3**
9	**0**
10	**0.3**
11	**1.3**
12	**3**

A través de esta tabla de valores es posible que logres observar la correspondencia entre los elementos del conjunto de valores de las "x" y los elementos del conjunto de las "y", así pues, **identificas que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto, de tal manera que puedes concluir que se trata de una función.**

¿Qué ocurre con los valores que obtuviste de ambos conjuntos?
Recuerda que integran una pareja ordenada. ***¿Cómo quedaría representado el conjunto de parejas ordenadas de los valores que obtuviste en esta tabla?***

Parejas Ordenadas
Las parejas ordenadas que se obtienen a partir de la tabla anterior son las siguientes:

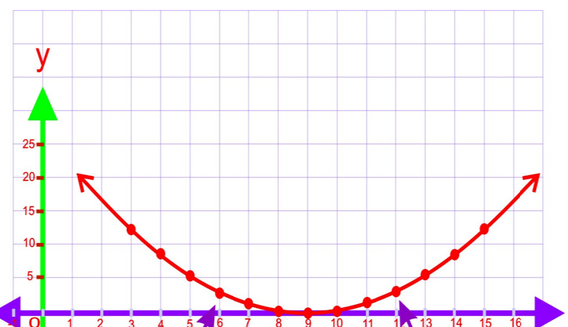
Ecuación: $f(x) = (x - 9)^2 \ / 3$

"x"	f(x) = y	Pareja Ordenada
6	3	(6, 3)
7	1.3	(7, 1.3)
8	0.3	(8, 0.3)
9	0	(9, 0)
10	0.3	(10, 0.3)
11	1.3	(11, 1.3)
12	3	(12, 3)

Parejas ordenadas = {(6, 3), (7, 1.3), (8, 0.3), (9, 0), (10, 0.3), (11, 1.3), (12, 3)}
El conjunto de parejas ordenadas se forma mediante la correspondencia entre un elemento de un conjunto con otro del segundo conjunto, para identificar si la relación de correspondencia es función, sólo tienes que analizar que los elementos que ocupan el lugar de las abscisas no se repitan.
Recuerda que una pareja ordenada está formada como sigue: (abscisa, ordenada).

El conjunto de las parejas ordenadas de arriba es una función ya que ningún elemento que ocupa el lugar de las abscisas se repite.
¿Qué ocurre con las parejas ordenadas que obtuviste de ambos conjuntos?

Forma gráfica
Como ya lo sabes, toda pareja ordenada la puedes representar en un plano cartesiano y si se trata de un conjunto de parejas ordenadas

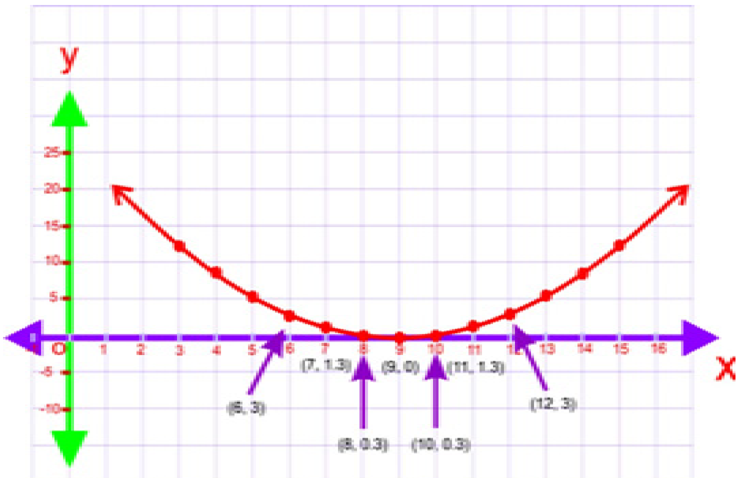


entonces éstas pueden estar representando alguna figura con características específicas.

Para identificar una pareja ordenada en el plano, sólo tienes que ubicar el valor que ocupa la posición de las abscisas sobre el eje de las “x”, y sobre el mismo desplazarte el valor correspondiente de la ordenada en forma vertical.
Si observas bien la gráfica, lograrás identificar que el conjunto de parejas ordenadas forman una parábola abierta hacia arriba, esta gráfica es otra forma distinta como puede ser representada una función, ahora, ***¿cómo identificar gráficamente una función?***

Una prueba muy sencilla y básica para determinar si una gráfica es una función o no, es la prueba de la recta vertical. ***¿En qué consiste?*** En trazar una recta **vertical** sobre la gráfica y si ésta corta sólo una vez a la gráfica entonces se trata de una función.

En la gráfica anterior traza una línea recta vertical sobre la misma e identificarás que como sólo corta una vez a la gráfica entonces se trata de una función.
Según sea el caso una función se puede representar mediante las distintas formas mencionadas anteriormente y a través de la práctica, lograrás identificar con mayor facilidad una función representada en cualquier forma.



Práctica 2

Supón que en el país de México la demanda diaria por persona es de 1.5 botellas plásticas, si en el año en curso se estima una población promedio de 109, 000, 000, ¿cuántas botellas plásticas se desechan diariamente en el país? Representa la relación anterior en sus distintas formas y determina si se trata de una función.

La relación anterior está proporcionada en forma verbal. La forma algebraica que le corresponde queda determina bajo las siguientes condiciones:

Considera la variable "y" como el número de botellas que se desechan diariamente y la variable "x" el número de habitantes, entonces, la ecuación queda como sigue:
$y = 1.5x$, o $f(x) = 1.5x$.

Práctica 3

Instrucciones: realiza lo siguiente.

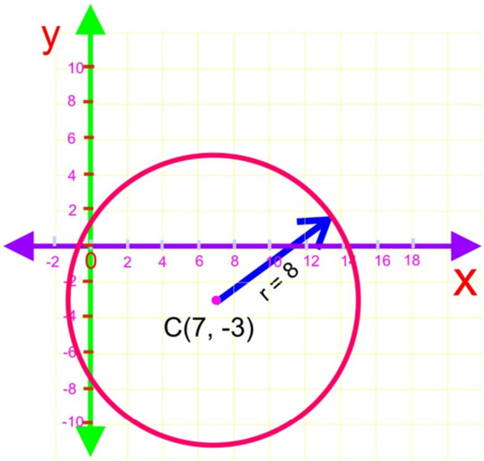
En cada una de las siguientes representaciones determina si la relación es o no funcional.

a) El siguiente conjunto de datos muestra la relación entre la cantidad total de miembros de una familia y el número de mascotas que tienen en casa. A={(3, 0), (5, 6), (2, 4), (7, 8), (2, 1), (7, 3), (4, 3), (8, 7)}

b) La siguiente tabla muestra la temperatura registrada en la semana.

Día	*Temperatura*
Lunes	26º
Martes	18º
Miércoles	29º
Jueves	30º
Viernes	29º
Sábado	28º
Domingo	20º

c) El contorno de una naranja gigante cuyas medidas se muestran en la gráfica.



1.1.2. Dominio y rango de una función

Maíz

Sabías que…
"Los primeros cultivos de maíz aparecieron en México hace por lo menos 8 mil 700 años.
El maíz era un alimento básico de las culturas indígenas americanas muchos siglos antes de que los europeos llegaran a América.
En las civilizaciones maya y azteca jugó un papel fundamental en las creencias religiosas, en sus festividades y en su nutrición".
Además de los 24 millones de toneladas de maíz que anualmente produce México, actualmente el gobierno mexicano **importa** cerca de 11 millones de toneladas de maíz de E.U. mezclado con variedades **transgénicas**.

- ¿Por qué crees que el gobierno haya decidido importar maíz?
- ¿Qué proporción de maíz correspondería a cada habitante del país actualmente?
- ¿Qué relación existe entre la cantidad de maíz producido y el número de habitantes respecto al precio de la tortilla?

Efectivamente los factores de la producción de maíz y la cantidad de habitantes en el país afectan a la economía y por lo tanto al precio de la tortilla. El gobierno incluso ha tomado la decisión de importar maíz, parece irónico que siendo el maíz desde hace miles de años un cultivo muy importante para México llegue al punto de importarlo y además transgénico.

Si anualmente en el país se producen aproximadamente 24 millones de toneladas de maíz y la cantidad promedio de habitantes es de 109 millones, ***¿cuánto maíz le correspondería a cada habitante al año? ¿Cuánto al día?***

La porción al año por habitante sería de 220 Kg de maíz y por día vendría siendo 602 g por habitante. Como te habrás dado cuenta, entre la producción de maíz y el número de habitantes en el país existe una relación de correspondencia, en este caso a cada habitante le corresponden 602 g de maíz, la relación además se estableció entre dos conjuntos, uno, A = {la cantidad de granos de maíz producidos anualmente en México} y el otro, B = {el número de habitantes en México}, dichos conjuntos pueden ser representados mediante números, A={0, 1, 2, 3, … 24} (toneladas en millones) y B = {1, 2, 3, … 109} (en millones).

Los elementos que componen al primer conjunto se les conoce como el **dominio de la relación o función** y a los elementos que componen el segundo conjunto es conocido como **el contradominio, rango o recorrido de la relación o función.**

Como ya lo sabes, la correspondencia entre ambos conjuntos se puede representar mediante una tabla, el ejercicio anterior quedaría de la siguiente forma:

Maíz	Habitantes
0.6 Kg	1
1.2 Kg	2
1.8 Kg	3
2.4 Kg	4
3 Kg	5
…	…
65.62 Ton	109 millones

En donde el dominio corresponde a los datos del maíz y el rango al de los habitantes. De lo que concluyes que el conjunto de valores del dominio es: D = {0.6, 1.2, 1.8, 2.4, 3…. 65, 618, 000} y el del rango es: R = {1, 2, 3, 4, 5, … 109. 000. 000}.

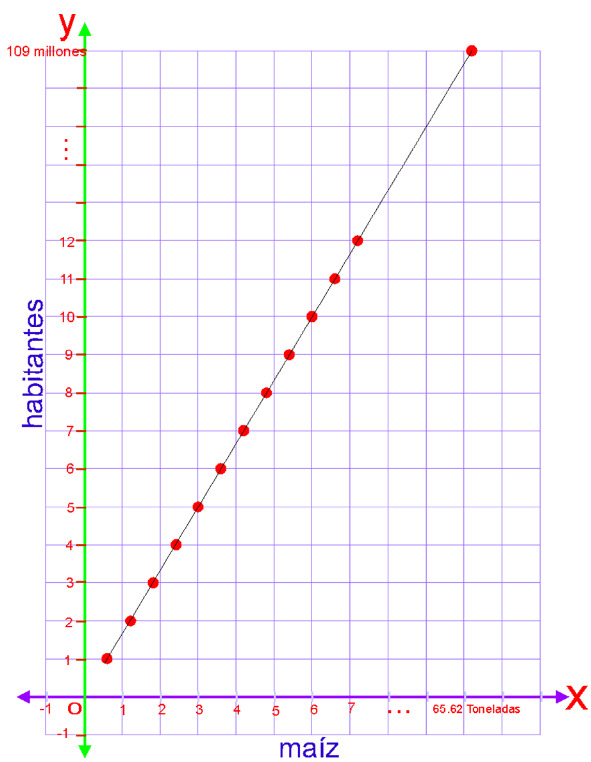
Además, recuerda que los valores proporcionados en las tablas se pueden representar mediante parejas ordenadas, de tal manera que la información anterior queda de la forma:

{(0.6, 1), (1.2, 2), (1.8, 3), (2.4, 3), (3, 5), … (65,618,000, 109, 000,000)}.

Del conjunto de parejas ordenadas proporcionadas, el dominio lo componen los primeros elementos de cada pareja y el rango lo componen los segundos elementos de las parejas.

Por lo tanto, agrupas los primeros elementos que forman las parejas ordenadas para obtener el dominio: D= {0.6, 1.2, 1.8, 2.4, 3…. 65, 618, 000} y agrupas el segundo elemento de cada pareja ordenada para obtener el rango: R = {1, 2, 3, 4, 5, … 109. 000. 000}.

Ahora, como sabes, cada pareja ordenada la puedes ubicar en el plano cartesiano mediante la representación de un punto, si ubicas cada pareja ordenada del conjunto anterior obtienes la siguiente gráfica que representa una línea recta cuyo inicio es el punto (0.6, 1) y su final es el punto cuyas coordenadas son (65, 618, 000, 109, 000, 000).



Para determinar el dominio y rango en una gráfica necesitas ubicar los valores que toman en "x", y cuales en "y"; en este caso ubicaste fácilmente el punto de inicio y el final de la gráfica, además como ésta representa una recta entonces hay una continuidad en los valores que toman en "x" y en "y", por lo que puedes lograr concluir que el dominio está dado por el intervalo D = {x e R / 0.6 ≤ x ≤ 65,618,000} y el rango por el intervalo: R = {y e R / 1 ≤ y ≤ 109, 000, 000}.
Fuera de esos valores ya no hay gráfica.

¿Cómo calcular el dominio y rango de una relación funcional o no, dada su ecuación?
Ejemplo 1:

Obtén el dominio y rango de: $6x^2 – 7x – 20 = y$

Podrás observar que como la ecuación es un polinomio, nada restringe a la variable “x” y por lo tanto puede tomar cualquier valor de los números reales. De tal manera que el dominio (cuyo conjunto está compuesto por los valores que, la relación funcional o no, toma en el eje de las “x”) está compuesto por todos los números reales y por defecto los valores de la variable dependiente serán también números que se encuentran dentro del conjunto de los reales, de lo cual concluyes que el rango está formado también por el conjunto de los números reales.
Por lo tanto D = { x e R} y R = {y e R}.

Práctica 3

Obtén el dominio y rango de: $f(x)=\dfrac{12}{6x^2-7x-20}$

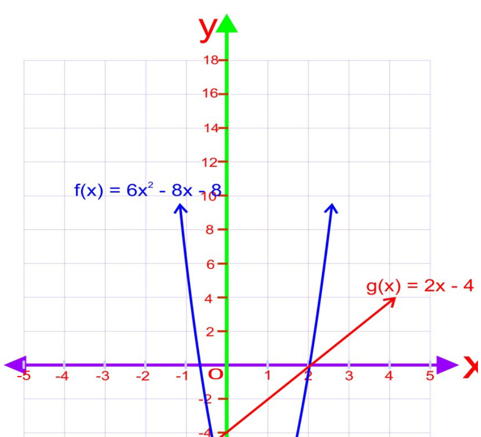
Obtener el dominio y rango de: $f(x)=\sqrt{4x-6}$

1.2. Operaciones con funciones

Si se tienen varias funciones, entre éstas se pueden realizar algunas operaciones como suma, resta, multiplicación, división y composición de lo que resulta otra función.
Sean f(x)= $6x^2 - 8x - 8$ *y* g(x) = $2x - 4$ dos funciones,

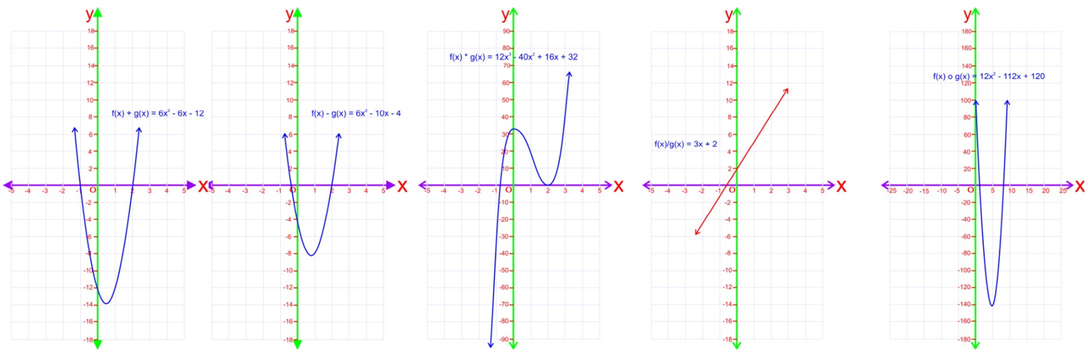
SUMA	DIFERENCIA	PRODUCTO	COCIENTE	COMPOSICIÓN
(f+g)x = f(x)+g(x)	(f-g)x = f(x)–g(x)	(f•g)x = f(x)•g(x)	$\left(\frac{f}{g}\right)x=\frac{f(x)}{g(x)}$ g(x)≠0	(f g)x = f(g(x))
Dominio de la suma de funciones: Df ∩ Dg	Dominio de la resta de funciones: Df ∩ Dg	Dominio del producto de funciones: Df ∩ Dg	Dominio del cociente de funciones: Df ∩ Dg	Dominio de la composición de funciones:
(f+g)x =(6x²–8x–8) + (2x – 4) (f+g)x=6x²–6x–12	(f-g)x =(6x²–8x–8) – (2x – 4) (f-g)x =6x²–10x–4	(f•g)x =(6x²–8x–8) • (2x – 4) (f•g)x=12x³-40x² +16x+32	$\left(\frac{f}{g}\right)x=\frac{6x^2-8x-8}{2x-4}$ $\left(\frac{f}{g}\right)x=\frac{(3x+2)(2x-4)}{2x-4}$ $\left(\frac{f}{g}\right)x=3x+2$	$(f\circ g)x=6(2x-4)^2-8(2x-4)-8$ $(f\circ g)x=6(4x^2-16x+16)-16x+32-8$ $(f\circ g)x=12x^2-112x+120$

La gráfica de las funciones f(x)= $6x^2 - 8x - 8$ *y* g(x) = $2x - 4$ son las siguientes:
Una parábola y una recta.
El dominio y rango de f(x) son:



Dominio = {R}
Rango = {x e R / -10.7 ≤ x }
El dominio y rango de g(x) son:
Dominio = {R}
Rango = {R}
Ahora, observa el cambio y comportamiento de las gráficas que resultan de las operaciones hechas con las funciones anteriores.

SUMA	DIFERENCIA	PRODUCTO	COCIENTE	COMPOSICIÓN
$(f+g)x=6x^2-6x-12$	$(f-g)x=6x^2-10x-4$	$(f \bullet g)x=12x^3-40x^2+16x+32$	$\left(\frac{f}{g}\right)x=3x+2$	$(f \circ g)x=12x^2-112x+120$



Práctica 4

Instrucciones: revisa la información que se te proporciona y realiza lo que se te pide.

Obtén el dominio y rango de las siguientes relaciones a través de la tabla de valores incluye las parejas ordenadas y su gráfica correspondiente, además determina si la relación es funcional o no.

1) $3x^3 - 4x + 7 = y$ 2) $f(x)=\sqrt{3-5x}$ 3) $f(x)=\dfrac{4x-5}{12x^2+9x-30}$

Representa mediante un diagrama de flechas la siguiente correspondencia y obtén el dominio y rango de la relación.

1) {(verde, sandia), (rojo, fresa), (amarillo, plátano), (morada, uva), (anaranjado, mandarina), (verde, uva), (amarillo, guayaba), (amarillo, mango), (rojo, manzana)}

Realiza las operaciones de suma, resta, multiplicación y composición entre las funciones $f(x) = 6x - 1$ y $g(x) = 3x^2 - 2x$.

Sesión 2

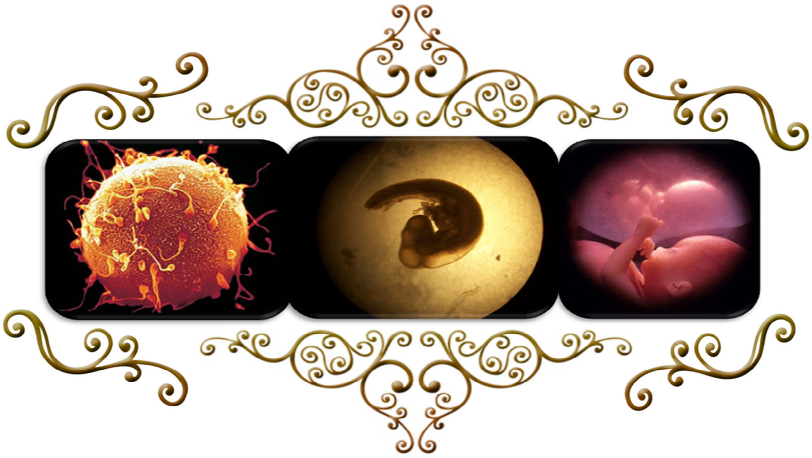
Los temas a revisar el día de hoy son:

1.3. Clasificación de las funciones
- **1.3.1. Funciones algebraicas y trascendentes**
- **1.3.2. Funciones continuas y discontinuas**
- **1.3.3. Funciones crecientes y decrecientes**
- **1.3.4. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas**

1.3. Clasificación de las funciones

Ser humano
Sabías que…

“La causa de la causa es la causa de lo causado”, el ser humano, desde su concepción es considerado como una persona humana bajo el fundamento de que éste es causado por dos seres humanos, es decir, es fruto de la relación entre un hombre y una mujer, según el Director del Centro Mexicano de Ginecología y Obstetricia SC, Carlos Fernández del Castillo Sánchez; pero, muchos otros, bajo otras perspectivas disfrazan la realidad para no sentirse mal y lo bautizan con un nombre a su favor.



Cuando te empezaste a formar en el vientre de tu mamá, en un principio eras una sola célula, la cual se formó al ser fecundado el óvulo por el espermatozoide y que recibe el nombre de cigoto.

- ¿Cómo es posible que ahora seas toda una dama o todo un caballero?
- ¿Qué ha ocurrido en ese lapso de tiempo?

Tu cuerpo quedó formado a partir de la octava semana, estabas del tamaño de una nuez cuando todos tus atributos esenciales ya se distinguían.

En el ejemplo anterior has visto las etapas de desarrollo de un bebé en el vientre de su mamá, cada etapa recibe un nombre según alguna particularidad del crecimiento del bebé, de la misma manera se clasifican las funciones, según ciertas características, dicha clasificación te ayudará a trabajarlas mejor a distinguirlas e identificarlas. En la vida cotidiana existen muchas situaciones en las cuales se pueden observar y describir funciones, por ejemplo:

a) Los economistas utilizan mucho las funciones en su forma gráfica para visualizar el comportamiento de la misma en cuanto a la demanda y la **oferta** y apreciar el punto de equilibrio entre ambas variantes.
b) En la **meteorología** usan las funciones en su forma gráfica porque les interesa saber el comportamiento de la temperatura respecto a las horas del día y así apreciar la temperatura máxima y la mínima durante el día.
c) En Química, para determinar las propiedades y características de una sustancia se sirven de las funciones en su forma gráfica al relacionar la variante de la temperatura, la presión, cantidad, etc.

1.3.1. Funciones algebraicas y trascendentes

Al tomar como base el ejemplo de inicio de sesión, es admirable percibir el crecimiento del ser humano y maravillarse de su formación, en un principio es una sola célula, la célula tiene un tamaño aproximado de 10 **mm**, ¡súper pequeñísimo!, la célula se reproduce sucesivamente y conforme ésta se reproduce el tamaño del ser humano aumenta, aunque el **útero** materno es un límite, pero cuando la madre da a luz a su hijo, éste continúa creciendo hasta cierta etapa, si fuiste atento seguramente estarás de acuerdo en que el ser humano desde el comienzo de la formación de su cuerpo está en relación a múltiples fenómenos, situaciones, etc.

El **devenir,** por ejemplo, es uno de los sucesos que afectan más al ser humano, este devenir se manifiesta en el tiempo y crecimiento de la persona, a continuación se muestra una tabla con datos aproximados del tamaño en relación con el tiempo (en edad) de una persona, desde el vientre de la madre hasta la adolescencia.

Funciones Algebraicas

Relación Tiempo-tamaño
en el vientre materno

Tiempo del feto	Tamaño
4 semanas	2-4 mm
8 semanas	29-38 mm
12 semanas	9-10 cm
14 semanas	12 cm
16 semanas	14 cm
20 semanas	20 cm
22 semanas	22 cm
24 semanas	24 cm
26 semanas	30 cm
28 semanas	40 cm
30 semanas	42 cm
32 semanas	44 cm
34 semanas	46 cm
36 semanas	48-50 cm

Relación Tiempo-tamaño
Niña - adolescente

Tiempo (edad)	Tamaño (cm)
1	73.5
2	84.9
3	93.7
4	100.8
5	107.1
6	112.8
7	118.3
8	123.7
9	128.9
10	133.8
11	138.8
12	145.6
13	151.2
14	157.1
15-18	164.2

Los datos proporcionados en la tabla de relación tiempo-tamaño de un bebé en el seno materno no se puede representar mediante una ecuación algebraica ya que los valores de las variantes no tienen nada en común, en cambio, para la tabla de relación tiempo-tamaño de la niña-adolescente se puede obtener un **estimado** y puede ser representada mediante la siguiente ecuación: $y = 6x + 75$ en donde la variable “x” representa el tiempo en edad y la variable “y” representa el tamaño. Esta ecuación sólo es válida hasta la edad de 15 años.

Si observas bien la tabla, la correspondencia que existe entre los elementos de cada conjunto es única por lo que se trata de una relación funcional.
La particularidad de la ecuación de esta función es que se trata de una ecuación algebraica polinomial.

Esta clase de funciones algebraicas las hay de diferentes tipos, se les considera a aquellas que se obtienen con las operaciones fundamentales de suma, resta, multiplicación y división, además de la potenciación y radicación.
Otras funciones tales, como la polinomial, que también pertenecen al conjunto de las algebraicas son las racionales e irracionales, las cuales se distinguen según su ecuación.

Tipos de funciones algebraicas:

Funciones Algebraicas

1) Polinomiales

Están expresadas siempre bajo la forma de un polinomio. El Dominio y Rango son los R.

$$f(x)=ax^{n}+bx+c$$

2) Racionales

Están expresadas siempre bajo la forma de una fracción de polinomios. El dominio y rango se restringe por el denominador que tiene que ser diferente de cero.

$$f(x)=\frac{ax+b}{x-c}$$

3) Irracionales

Están expresadas siempre bajo la forma que implica un radical. El dominio y rango se restringe por el radicando que tiene que ser mayor igual a cero.

$$f(x)=\sqrt{x^{n}-b}$$

Algunas **aplicaciones de las funciones algebraicas**:

1) Polinomiales

- Dibujo, para elaborar un diseño en dimensiones proporcionadas.
- Arquitectura, para una construcción proporcional.
- Tecnología Industrial, en la fabricación de cajas de metal, etc.
- Ingeniería petrolera, para calcular la caída de presión en un depósito de petróleo.

2) Racionales

- Tecnología médica, para calcular la concentración de un medicamento en la sangre.
- Arquitectura, para la construcción de puentes.
- Construcción, para determinar el número de obreros que se necesitan para edificar una construcción en cierto tiempo.
- Ingeniería mecánica, para calcular la velocidad de un objeto a partir de su distancia recorrida en cierto tiempo.

3) Irracionales

- Tecnología nuclear, para calcular la velocidad de **protón**.
- Ingeniería civil, para calcular la velocidad máxima en una curva sin derrapar.
- Tecnología de la iluminación, para determinar la intensidad de una fuente lumínica.
- Química, para calcular la distancia de capas de iones en un **cristal de cloruro de sodio.**

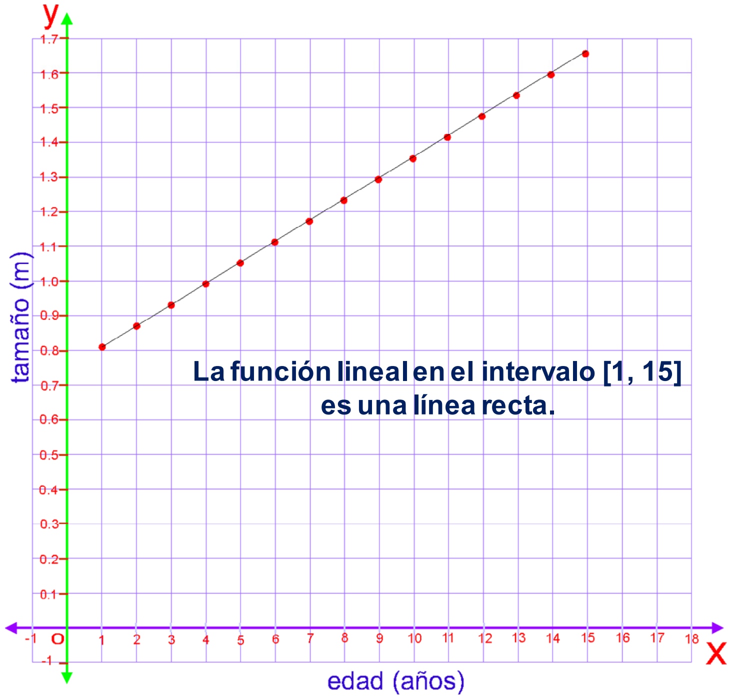
Funciones Algebraicas Polinomiales

Ejemplo 1:

Si retomas el ejemplo de la relación tiempo-tamaño en la forma de su ecuación $f(x) = 6x + 75$, la gráfica correspondiente es del tipo:

Ecuación:
$f(x) = 6x + 75$

Edad *"x"*	Tamaño f(x)
1	**81**
2	**87**
3	**93**
4	**99**
5	**105**
6	**111**
7	**117**
8	**123**
9	**129**
10	**135**
11	**141**
12	**147**
13	**153**
14	**159**
15	**165**



Práctica 5

a) Considera la ecuación cuadrática $g(x) = 5x^2 - 8x + 6$, grafica e identifica su forma.

b) Considera la siguiente ecuación irracional $f(x) = \sqrt{3x - 7}$, grafica e identifica su forma.

Funciones Trascendentes

Retomando el ejemplo inicial, ¿qué ha ocurrido en el lapso de la fecundación hasta el nacimiento del bebé? La primer célula se reproduce en dos células idénticas, éstas también se vuelven a reproducir en dos idénticas cada una, y así sucesivamente hasta alcanzar un máximo de 4,000 millones de células en su nacimiento (a este tipo de fenómeno se le conoce como Mitosis).

La reproducción sucesiva de estas células es un incremento progresivo el cual se puede representar mediante una ecuación y según su forma tanto gráfica como en su ecuación se distingue y se clasifica como una función **exponencial**.

Dicha función exponencial pertenece al conjunto de las **funciones trascendentes**, las cuales poseen la particularidad de involucrar razones trigonométricas, trigonométricas inversas, así como las logarítmicas y las exponenciales.

Este tipo de funciones pueden distinguirse en cuanto a su ecuación y representación gráfica, a continuación se describen algunas reseñas para identificar la ecuación del tipo de funciones trascendentes.

Tipos de funciones trascendentes:

Funciones Trascendentes

1) Exponenciales

$f(x)=2^x$

Están expresadas mediante una base numérica y cuya potencia involucra la variable independiente.

2) Logarítmicas

$f(x)=\log(3x-1)$

Están expresadas mediante la función logaritmo aplicada a la variable independiente.

3) Trigonométricas

$f(x)=\cos x$

Están representadas a través de las funciones trigonométricas.

Algunas **aplicaciones de las funciones trascendentes**:

1) Exponenciales

- Biología, la reproducción de la célula y de las bacterias.
- Química, para determinar la edad de un fósil, a través de la **desintegración radiactiva**.
- Meteorología, para calcular la presión atmosférica.
- Demográfica, el crecimiento o disminución de la población.

2) Logarítmicas

- Sismología, la medición de los sismos se hace a través de la fórmula de Richter la cual involucra la función logarítmica.
- Ingeniería acústica, para medir la intensidad del sonido.
- Química, para calcular la acidez o alcalinidad de las sustancias. A través del **PH**.
- Economía, para calcular el **capital** en cierto tiempo de una inversión con cierto interés.

3)Trigonométricas

- Ingeniería mecánica, para calcular velocidades y distancias de un proyectil.
- Electricidad, para calcular el voltaje efectivo.
- Arquitectura, para la construcción.
- Para el control del tráfico aéreo a través del cálculo de la altura del **cielo raso**.

Lo importante en esta sesión es que aprendas a identificar los tipos de funciones a través de su ecuación, a continuación se muestra un ejemplo de cada tipo de función con su gráfica respectiva, más adelante retomarás cada tipo de función en particular para observar sus propiedades y características, así como para aprender a graficar cada una de ellas, en esta sesión no te detengas en eso, ya que no es propio de este tema.

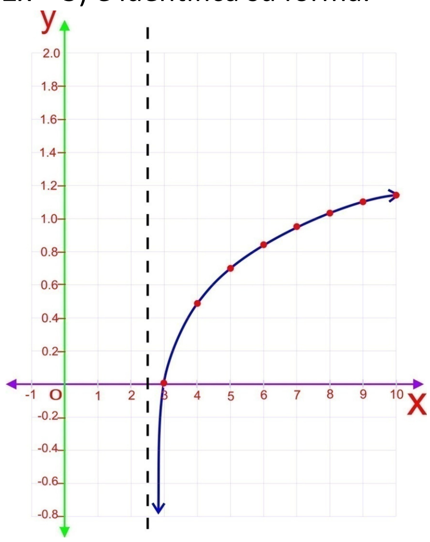
Sólo identifica a través de la ecuación el tipo de función y trata de familiarizarte con la forma de su gráfica pues cada una es única.

Para lograr resolver uno de los ejemplos de aplicación de las funciones mencionadas anteriormente es necesario que aprendas primero lo que en esta semana se te proporciona, más adelante tratarás y resolverás problemas de tu interés.

Funciones Trascendentes Exponenciales
Ejemplo 2:
Grafica la ecuación logarítmica h(x) = log (2x – 5) e identifica su forma.

Ecuación:
h(x) = log (2x – 5)

“x”	h(x)
2.6	-0.69
3	0
4	0.477
5	0.699
6	0.845
7	0.954
8	1.041
9	1.114
10	1.176



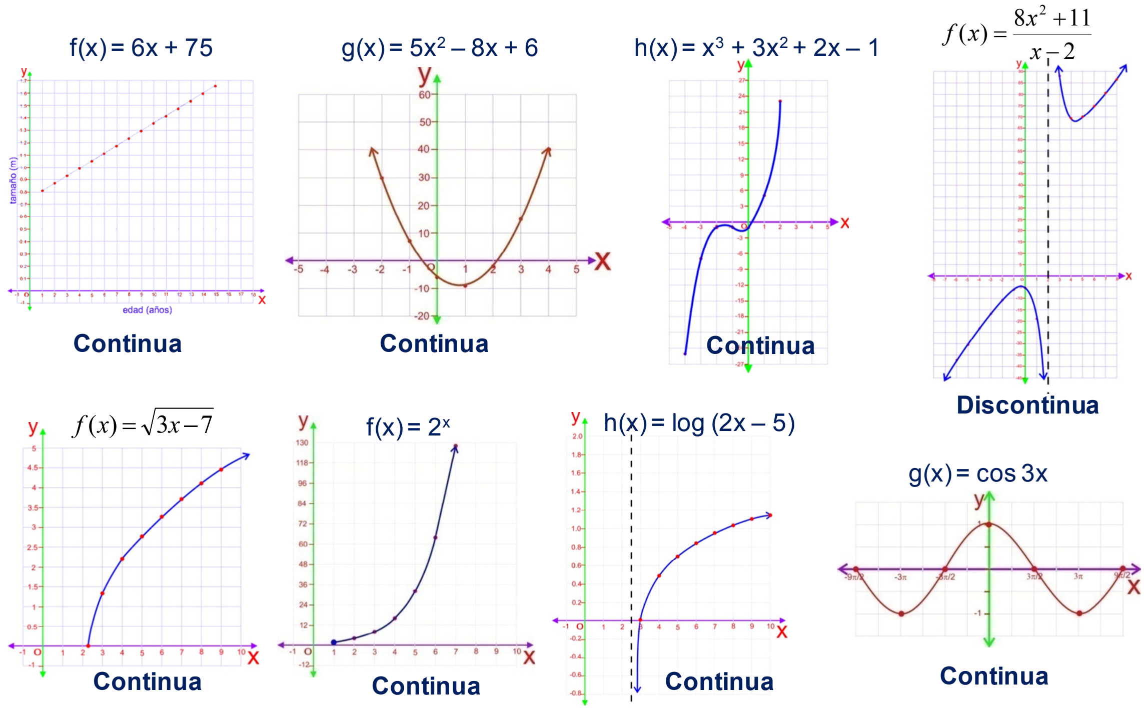
1.3.2. Funciones continuas y discontinuas

Ya has visto un tipo de clasificación de funciones, fácil de identificar mediante su ecuación, otro tipo de clasificación es respecto al comportamiento gráfico, ¿qué nombre reciben aquellas funciones o relaciones cuya gráfica implica un sólo trazo?, ¿y cómo se llaman aquellas donde ocurre lo contrario?

Las gráficas que no presentan ningún punto aislado, saltos o interrupciones y que están hechas de un sólo trazo en un intervalo determinado son llamadas funciones continuas.

Las gráficas que presentan algún punto aislado, saltos o interrupciones, es decir, que no están hechas de un sólo trazo en un intervalo determinado, son llamadas funciones discontinuas.

A partir de estos dos conceptos fácilmente es posible identificar en la gráfica el tipo de función que se trata, al retomar las gráficas de las funciones algebraicas y trascendentes anteriores, a través de sus gráficas puedes identificar si se trata de una función continua o discontinua, compara tus conclusiones con la siguiente clasificación.



Una manera distinta en que se puede representar gráficamente una función discontinua es la siguiente:

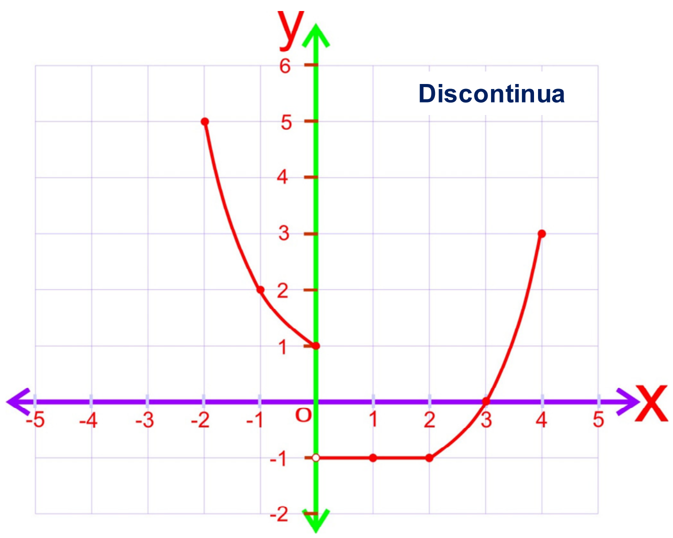
Ejemplo:

Grafica la función definida por secciones f(x) en el intervalo [-2, 4]. Indica el comportamiento de la gráfica en los intervalos de la tabla según la gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & -2 \le x \le 0 \\ -1 & 0 < x \le 2 \\ x^2 - 4x + 3 & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

"x"	f(x)
-2	5
-1	2
0	1
1	-1
2	-1
3	0
4	3

Intervalos	Comportamiento
[-2, 0]	Continua
(0, 2]	Continua
[2, 4]	Continua
[-2, 4]	Discontinua



Práctica 6

Relaciona cada situación o fenómeno con la forma funcional que le corresponde para ser expresada mediante una ecuación.

a) Crecimiento exponencial de la población.

b) Grado de un terremoto.

c) Elaboración de una caja con dimensiones proporcionadas en una sola variable.

d) Altura del cielo raso a través de la función trigonométrica.

e) Razón de concentración de un medicamento en la sangre.

f) Velocidad de un protón.

( ) $x^3 + 9x^2 + 16.25x = y$

( ) sen α = cateto opuesto / hipotenusa

( ) $v = \sqrt{\frac{2KE}{m}}$

( ) R = log x

( ) $5^x = y$

( ) $C(t) = \frac{3t^2 + t}{t^3 + 50}$

1.3.3. Funciones crecientes y decrecientes

Condición Física

Arturo quiere participar en la carrera de 1,000 m que se realizará en su ciudad, el Gobierno la organiza para fomentar el deporte en los jóvenes y despertar en ellos el interés por las riquezas naturales que hay en el país, Arturo tiene todo un mes para prepararse, su meta es ganar la carrera pues desde hace años ha deseado muchísimo salir de su pueblito y conocer más a México.

- ¿Qué necesita Arturo para ganar la carrera? ¿Qué harías tú si estuvieras en su lugar?
- Si Arturo se prepara y aun así, no gana la carrera, ¿qué logros habrá alcanzado?

Para poder ganar una carrera es necesario prepararse y estar en muy buena condición para resistir y mantenerse compitiendo hasta el fin, seguramente habrás contestado igual a la pregunta inicial, Arturo tiene que prepararse, y ¿cómo se tiene que preparar? ¿Psicológicamente, pensando solamente en que va a ganar y lo conseguirá? O ¿comiendo mucho para tener suficientes fuerzas? ¿Descansando todo el tiempo para ahorrarse energías? ¿Cómo?

La mejor preparación que puede tener, es a través de una sana alimentación, ciertamente que implicará un sacrificio para él porque dejará de consumir los pequeños antojos (nieve, papitas, refresco, pizza…) con que se deleitaba durante el día, además que le será necesario ejercitarse físicamente, es decir, dedicarle diariamente un tiempo al ejercicio, correr, caminar, etc. Y, lo más, más importante es mantener ese ritmo diariamente hasta el día de la competencia.

Supón que el mes de preparación pasó ya y Arturo diariamente llevaba una bitácora de tiempos y días de ejercicio, la siguiente tabla muestra los resultados que obtuvo.

Días de la semana

Tiempo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Semana 1	10’	12’	14’	16’	18’	20’	22’
Semana 2		19’	19’	19’	19’		
Semana 3	10’ y 8’	22’	24’	26’	28’	26’	24’
Semana 4	22’	20’		9’	27’	81’	

Como notarás en la tabla anterior, Arturo no hizo ejercicio todos los días, lo cual evidentemente le afecta en la condición que día a día adquirió, y en la última semana intentó duplicar su esfuerzo justo antes del día de la carrera.

Si analizas la primer semana, su condición física se fue incrementando constantemente, es decir, tuvo un crecimiento en cuanto a los tiempos de ejercicio, si se expresan los tiempos de la primer semana en lenguaje algebraico, su ecuación corresponde a $y = 2x + 8$, en donde la variable “x” representa el día (1, 2, 3…7) y la variable “y” representa el tiempo dedicado al ejercicio físico.

Como ya lo descubriste en la tabla anterior, en la primer semana los tiempos crecieron ya que hubo un aumento constante diario, a dicho fenómeno se le conoce como función creciente, por lo tanto la función $y = 2x + 8$ se le considera una función creciente.

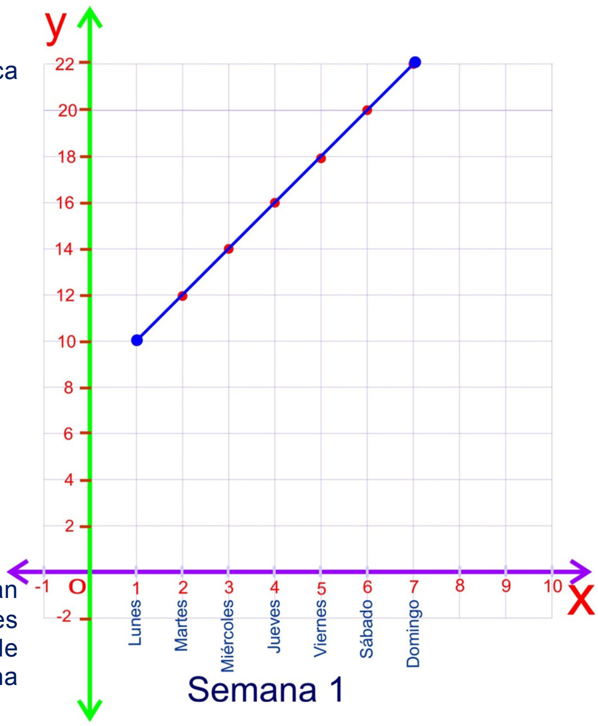
Formalmente puedes concluir que una **función creciente** es aquella cuyos valores en un intervalo determinado se incrementan, es decir, para cualquier valor del dominio x_1 y $x_2 \in D$ y R, en donde $x_1<x_2$, la imagen obtenida para cada uno mantiene la relación $f(x_1) < f(x_2)$.

A través de los valores de la tabla lograste identificar que la función anterior era una función creciente, pero, en caso de que se tenga la interpretación gráfica ¿cómo saber si se trata de una función creciente?

Para responder la pregunta anterior grafica la función, observa y analiza su comportamiento en el plano cartesiano.

La tabla de la Semana 1 y su respectiva gráfica son las siguientes:

Semana 1	Tiempo
Lunes	10’
Martes	12’
Miércoles	14’
Jueves	16’
Viernes	18’
Sábado	20’
Domingo	22’



Si observas bien la gráfica, conforme aumentan los valores del dominio, sus respectivas imágenes se incrementan también, por lo tanto a través de la gráfica puedes deducir que se trata de una función creciente.

Al analizar la segunda semana de ejercicios de Arturo es fácil concluir que fue la semana más floja, ya que de 7 días sólo 4 tomó tiempo para hacer sus ejercicios y los días que los hizo no tuvo ningún incremento en cuanto al tiempo dedicado, se mantuvo siempre estable, sin crecimiento, dicho de manera matemática, los tiempos se mantuvieron constantes.

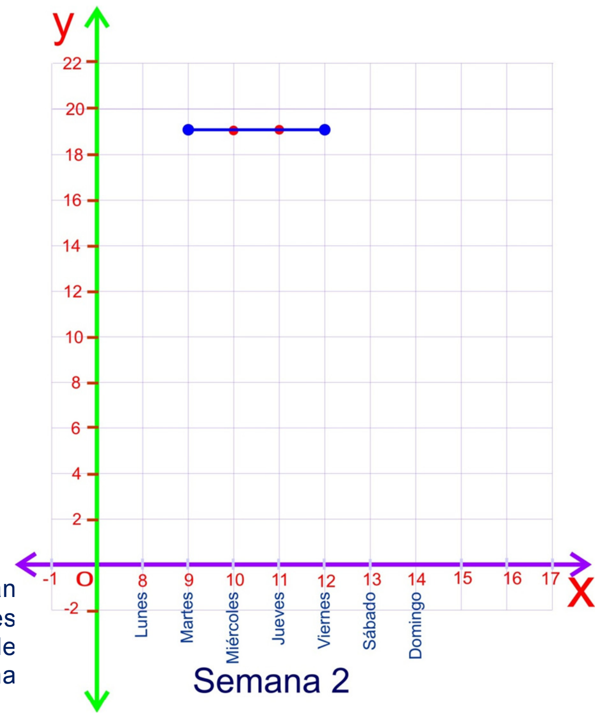
	Lunes	**Martes**	**Miércoles**	**Jueves**	**Viernes**	**Sábado**	**Domingo**
Semana 2		19’	19’	19’	19’		

¿Cómo queda representada la relación tiempo-días de la segunda semana si la conviertes a texto algebraico?
La relación queda representada bajo la función y = 19 en el intervalo Martes-Viernes, tal ecuación en dicho intervalo es una función constante, entonces se trata de una **función constante.**

¿Cómo identificar una función algebraica polinomial constante en su interpretación gráfica?

La tabla y gráfica de la función constante es la siguiente:

Semana 2	Tiempo
Lunes	
Martes	19’
Miércoles	19’
Jueves	19’
Viernes	19’
Sábado	
Domingo	



Si observas bien la gráfica, conforme aumentan los valores del dominio, sus respectivas imágenes se mantienen constantes, por lo tanto a través de la gráfica puedes deducir que se trata de una función constante.

Al analizar la tercer semana de ejercicios de Arturo, el primer día optó por tomar doble tiempo de ejercicio, primero 10’ y luego 8’, el resto de los días hasta el jueves fue incrementando su tiempo, pero, al finalizar la semana sus tiempos fueron disminuyendo de manera constante.

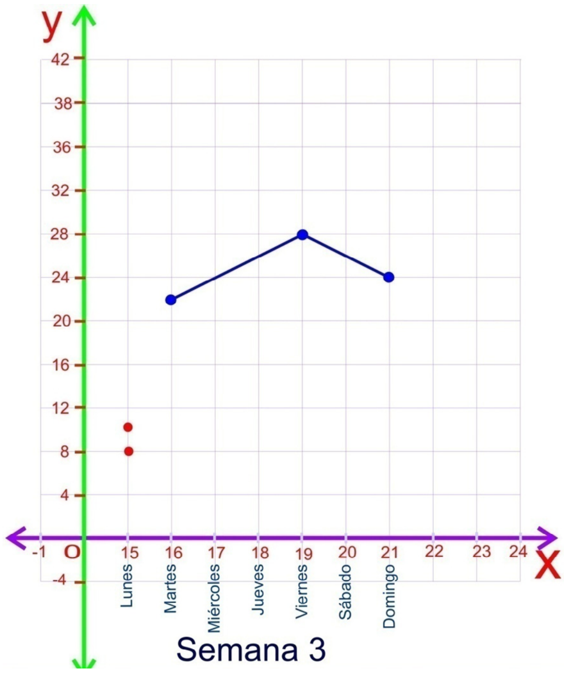
	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Semana 3	10’y 8’	22’	24’	26’	28’	26’	24’

En el intervalo de Martes a Viernes, la forma algebraica de la relación queda determinada por $2x - 10 = y$, en el intervalo Viernes a Domingo, la ecuación que represente dicha relación es $y = 66 - 2x$. En esta última ecuación, la cual se trata de una función lineal, los tiempos disminuyen, y cuando esto ocurre la función recibe el nombre de función decreciente.

Formalmente puedes concluir que una **función decreciente** es aquella cuyos valores en un intervalo determinado disminuyen, es decir, para cualquier valor del dominio x_1 y x_2 ε D y R, en donde $x_1<x_2$, la imagen obtenida para cada uno invierte la relación $f(x_1) > f(x_2)$.

La tabla y gráfica de la función son las siguientes:

Semana 3	Tiempo
Lunes	10' y 8'
Martes	22'
Miércoles	24'
Jueves	26'
Viernes	28'
Sábado	26'
Domingo	24'



Si observas bien la gráfica, conforme aumentan los valores del dominio en el intervalo Viernes-Domingo, sus respectivas imágenes disminuyen, por lo tanto a través de la gráfica puedes deducir que se trata de una función decreciente.

Al analizar la cuarta semana de ejercicios de Arturo puedes observar que estuvo muy variada como la semana 3, al principio los tiempos decrecieron, y después de un día de reposo se intensifica al final de la semana con un crecimiento exponencial.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Semana 4	22'	20'		9'	27'	81'	

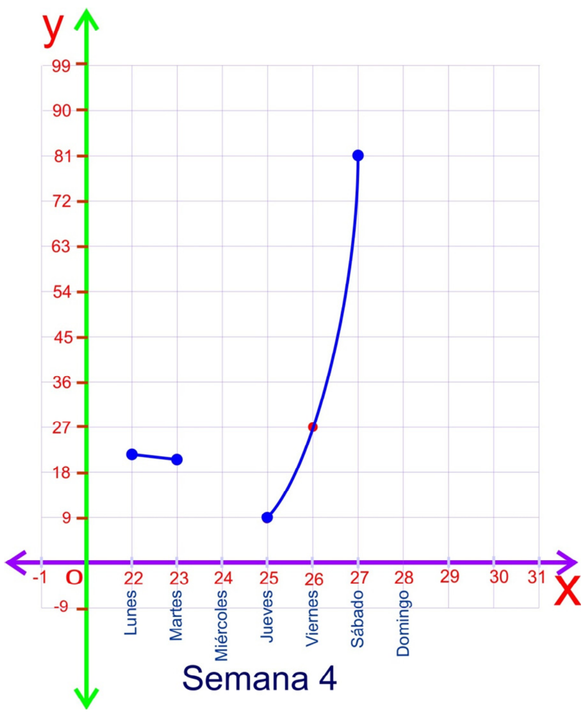
¿Cómo queda representada la relación tiempo-días de la cuarta semana si la conviertes a texto algebraico?

La relación en el intervalo Lunes-Martes queda representada bajo la función $y = 66 - 2x$, la cual ya se mencionó que es una función lineal decreciente, por otra parte en el intervalo de Jueves a Sábado la relación queda determinada bajo la ecuación $y = 3^{x-23}$, dicha función es del tipo trascendente exponencial.

La gráfica correspondiente a esta semana queda determinada como sigue:

La tabla y gráfica de la función son las siguientes:

Semana 4	Tiempo
Lunes	22’
Martes	20’
Miércoles	
Jueves	9’
Viernes	27’
Sábado	81’
Domingo	



Si observas bien la gráfica, conforme aumentan los valores del dominio en el intervalo Jueves-Sábado, sus respectivas imágenes se incrementan, por lo tanto a través de la gráfica puedes deducir que se trata de una función creciente.

1.3.4. Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

En esta sección se trata de analizar tanto los elementos del dominio como los del rango e imagen de una función, a través de estos es posible clasificar de una nueva manera a una función.

Al retomar la tabla de ejercicios de Arturo se tenían los siguientes datos:

Días de la semana

Tiempo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Semana 1	10’	12’	14’	16’	18’	20’	22’
Semana 2		19’	19’	19’	19’		
Semana 3	10’ y 8’	22’	24’	26’	28’	26’	24’
Semana 4	22’	20’		9’	27’	81’	

Si agrupas los elementos de los conjuntos día-tiempo por semana resulta lo siguiente:

Semana 1

Función algebraica polinomial lineal $y = 2x + 8$

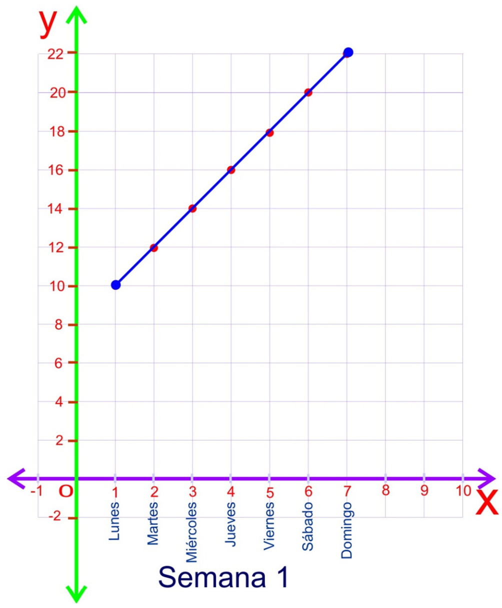
Observa la correspondencia entre los elementos de ambos conjuntos, a cada elemento del conjunto “días” le corresponde un único elemento del conjunto “tiempo”, todos los elementos del primer conjunto tienen una única imagen.

Cuando esto ocurre en la correspondencia de una función recibe el nombre de función inyectiva o “uno a uno”.

Formalmente puedes concluir que una **función inyectiva o "uno a uno"** es aquella que para cada valor de su dominio x_1, x_2 donde $x_1 \neq x_2$ se encuentra un valor diferente y único en el rango $f(x_1) \neq f(x_2)$.

En otras palabras quiere decir que para cada valor del dominio existe un único y solo valor del contradominio que le corresponda. ***¿Cómo identificar una función inyectiva en la gráfica?***

La gráfica de la función y = 2x + 8 es la siguiente:
Para saber gráficamente si se trata de una función inyectiva, **se traza una línea recta horizontal sobre la misma**, y si ésta la cruza solamente en un punto, entonces se dice que la función es inyectiva.

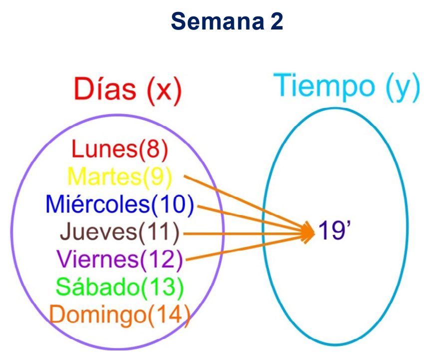


En este caso, como podrás observar en la gráfica, al trazar la línea recta horizontal, ésta la corta sólo en un punto por lo tanto puedes concluir que ciertamente se trata de una función inyectiva.

¿Qué ocurre con la semana 2 de tiempos de ejercicio que tomó Arturo?

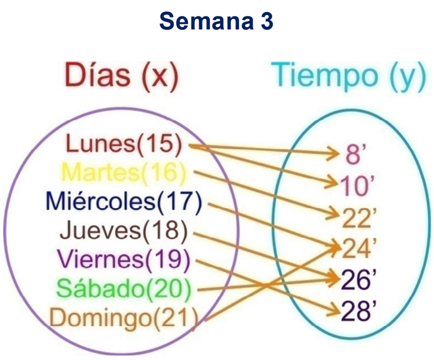
En cuanto al análisis de la semana 2 resulta lo siguiente:

Función algebraica polinomial constante y = 19
Observa la correspondencia entre los elementos de ambos conjuntos, ***¿qué ocurre?*** No todos los elementos del primer conjunto están en correspondencia con algún elemento del contradominio, además que a varios elementos del dominio le corresponde la misma imagen. ***¿Será una función inyectiva?***
Analiza su gráfica y haz la prueba de la recta horizontal y obtén tú mismo la respuesta.



Ahora, ¿qué ocurre con la semana 3 de tiempos de ejercicios que tomó Arturo?

Al analizar la semana 3 se obtiene lo siguiente:



Función algebraica polinomial

$$f(x) = \begin{cases} 8' \text{ y } 10' & x = 15 \\ 2x - 10 & 16 \leq x \leq 19 \\ 66 - 2x & 19 \leq x \leq 21 \end{cases}$$

Observa la correspondencia entre los elementos de ambos conjuntos, a cada elemento del conjunto "días" le corresponde uno o más elementos del conjunto "tiempo", además de que algunos elementos del dominio repiten su imagen, por ejemplo, Miércoles y Domingo tienen la misma imagen (24).

Otra característica es que todos los elementos del contradominio son imagen de algún elemento del dominio. Cuando esto ocurre en la correspondencia entre los elementos del dominio y rango de una función, a ésta se le conoce como una función sobreyectiva.

Formalmente puedes concluir que una **función es sobreyectiva o suprayectiva** si los elementos del contradominio son todos imagen de al menos un elemento del dominio.

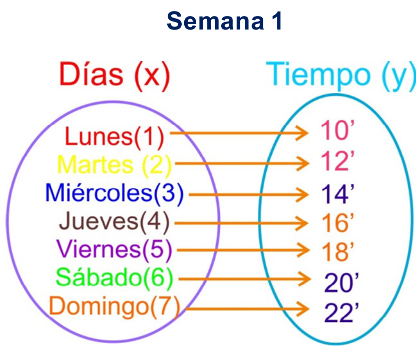
Práctica 7

¿Qué ocurre con la semana 4? Averígualo tú mismo.

Ya concluiste que la función de la semana 1 es una función inyectiva, ahora, determina si es o no una función sobreyectiva.

Función algebraica polinomial lineal y = 2x + 8

Como observas en la correspondencia, todos los elementos del contradominio son imagen de al menos un elemento del dominio, por lo que concluyes que se trata también de una función sobreyectiva, cuando una función es inyectiva y sobreyectiva a la vez se le conoce como función biyectiva.



Formalmente puedes concluir que una **función es biyectiva** si es al mismo tiempo inyectiva o “uno a uno” y sobreyectiva o suprayectiva.

Práctica 8

Considera la ecuación y = 3x – 7 con “x” *y* “y” ε R. Determina si la ecuación anterior es biyectiva.

Para determinar si la ecuación es una función biyectiva es necesario verificar si es inyectiva y sobreyectiva.

Sesión 3

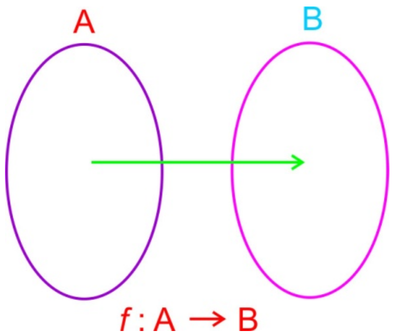
Los temas a revisar el día de hoy son:

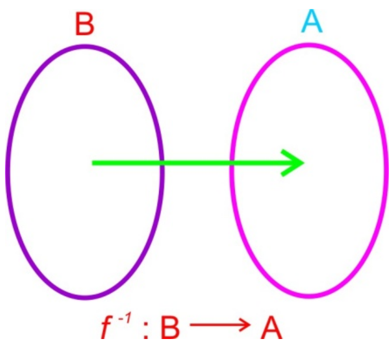
1.3.5. Función Inversa
  1.3.5.1. Obtención de parejas ordenadas y de la regla de correspondencia
  1.3.5.2. Forma algebraica y geométrica de la Función Inversa

1.3.5. Función Inversa

Función inversa: al considerar una función *f(x)* que tiene por dominio el conjunto A y por rango el conjunto B (*f(x)* : A → B), es llamada **función inversa de *f(x)***, a la función que tenga como dominio al conjunto B y como rango al conjunto A, dicha función inversa se denota de la siguiente manera:

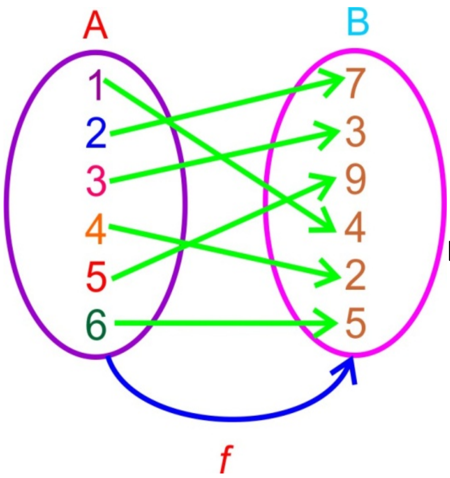
$f^{-1}(x)$: B → A.





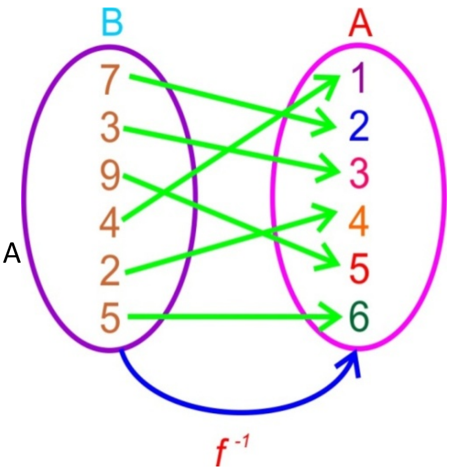
Ejemplo:

Considerado el siguiente diagrama sagital que representa una función, determina su función inversa.



La función inversa que le corresponde es la siguiente:

Si *f(x)*: A → B
Entonces $f^{-1}(x)$: B → A



Nota: El símbolo f^{-1} no indica que *f* está elevada a la potencia –1, por lo que no se trata del recíproco de la función:

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

Es importante remarcar que una función posee una inversa solamente si ésta es biyectiva y su inversa también lo será.

1.3.5.1. Obtención de parejas ordenadas y de la regla de correspondencia

Para el caso de una función representada por un **conjunto de parejas ordenadas**, es posible obtener la función inversa invirtiendo el orden de los elementos que forman cada una de las parejas ordenadas, de tal manera que se cumpla lo anterior, que el dominio de la función corresponda ahora al rango de la función inversa.

Ejemplo:

Sea $f(x) = \{(-8, 1), (-6, 2), (3, 4), (7, 7)\}$ una función. Determina su función inversa correspondiente.

Solución:

Para obtener la función inversa del conjunto de parejas ordenadas anterior, sólo basta con invertir el orden de cada elemento de las parejas ordenadas, de tal manera que obtienes lo siguiente:

$$f^{-1} = \{(1, -8), (2, -6), (4, 3), (7, 7)\}$$

Verifica mediante la obtención del dominio y rango de ambas funciones si una es la inversa de la otra.

Para el caso de la **regla de correspondencia**, adviertes que se cumple cuando todo el conjunto de elementos del dominio de la función, corresponden exactamente al conjunto de elementos que forman el rango de la función inversa, y el conjunto de elementos del rango de la función corresponden exactamente al conjunto de elementos del dominio de la función inversa.

Del ejemplo anterior:

El dominio de la función f es: D = $\{-8, -6, 3, 7\}$
El rango de la función f es: R = $\{1, 2, 3, 7\}$

El dominio de la función inversa f^{-1} es: D = $\{1, 2, 3, 7\}$
El rango de la función inversa f^{-1} es: R = $\{-8, -6, 3, 7\}$

Otra manera de comprobar que la regla de correspondencia se cumple es a través de la ecuación de la función, tanto ésta como su representación gráfica es el siguiente tema de análisis.

1.3.5.2. Forma algebraica y geométrica de la Función Inversa

Hasta ahorita has aprendido a obtener la función inversa de una función representada en su forma de diagrama sagital, o mediante su representación de conjunto de parejas ordenadas, pero el detalle a tratar ahora es la obtención de la función inversa de una, representada en su **forma algebraica**.

Para aprender a obtener la función inversa de una función dada su expresión algebraica, has de recordar que la función posee una variable independiente, esta variable es clave, porque al despejarla de la ecuación de la función, se convierte en una variable dependiente y cuando esto ocurre la función se convierte en la inversa.

<u>**Ejemplo:**</u>

Obtén la inversa de la función y = *f(x)* = $5x^2 + 8$, con $x \geq 0$.

Pasos para obtener la función inversa:

1. Identifica la variable independiente de la función y = *f(x)*: “x”
2. Despeja la variable independiente y obtén la función x = *f(y)* $x = f(y) = \sqrt{\frac{y-8}{5}}$
3. Sustituyes *“y”* por *“x”* y *f(y)* por $f^{-1}(x)$ $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-8}{5}}$

Una característica importante que se advierte en la representación algebraica de una función y su inversa, es que la composición de ambas siempre es igual a la variable independiente.

Del mismo ejemplo anterior:
Considera la función: f(x) = $5x^2 + 8$ y su inversa que es la función: $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-8}{5}}$

La función compuesta $(f \circ f^{-1})$ (x) = $f(f^{-1}) = 5\left(\sqrt{\frac{x-8}{5}}\right)^2 + 8$

Aplicas el cuadrado:
Multiplicas por 5
Simplificas
Y ¡listo!

$$f(f^{-1}) = 5\left(\frac{x-8}{5}\right) + 8$$

$$f(f^{-1}) = x - 8 + 8$$

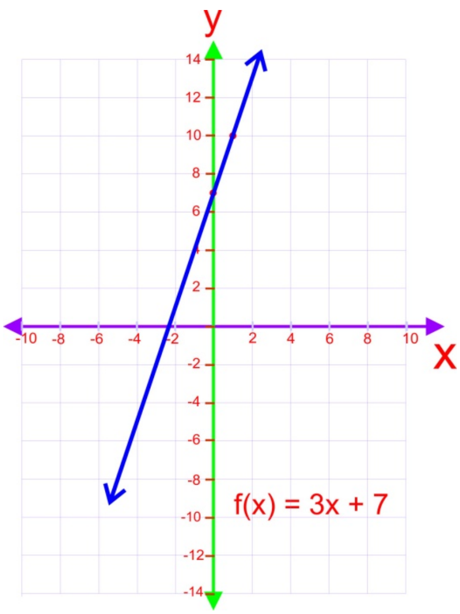
$$f(f^{-1}) = x$$

Forma geométrica de una función inversa

En el caso de la forma geométrica de una función inversa es indispensable graficar tanto la función como su inversa para advertir la diferencia entre ambas en el plano cartesiano, además de advertir el dominio y rango de cada una.

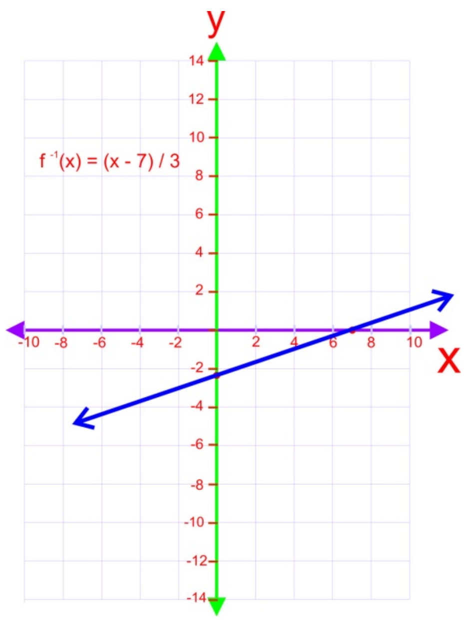
Ejemplo: Considera la siguiente función y obtén su inversa, grafícalas y obtén el dominio y rango de cada una.

1) Sea f(x) = 3x + 7, su función inversa corresponde a $f^{-1}(x) = \frac{x-7}{3}$



x	f(x)
0	7
1	10
2	13

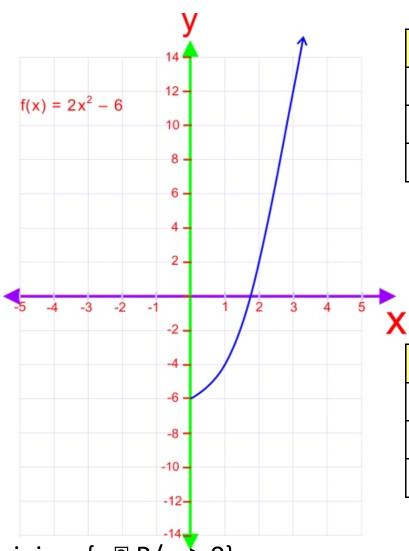
x	$f^{-1}(x)$
0	-2.33
1	-2
2	-1.66



Dominio = {R}
Rango = {R}

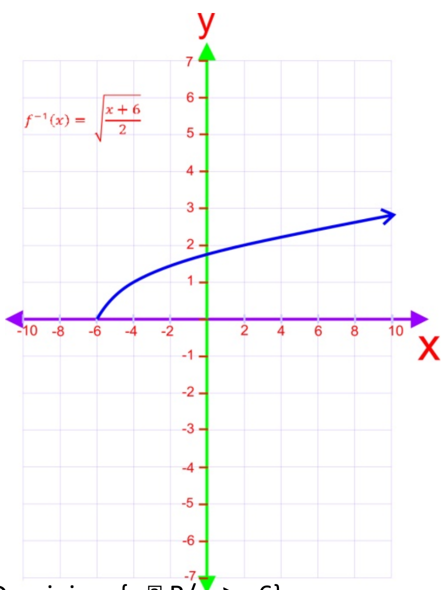
Dominio = {R}
Rango = {R}

2) Sea f(x) = $2x^2 - 6$, con x ≥ 0, su función inversa corresponde a $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+6}{2}}$ con x ≥ –6.



x	f (x)
0	-6
1	-4
2	2

x	$f^{-1}(x)$
-6	0
-4	1
2	2



Dominio = {x ∈ R/ x ≥ 0}
Rango = {y ∈ R/ y ≥ –6}

Dominio = {x ∈ R/ x ≥ –6}
Rango = {y ∈ R/ y ≥ 0}

Práctica 9

Dadas las siguientes funciones *f(x)*, encuentra su inversa $f^{-1}(x)$.

1) f(x) = 3 – 5x

2) f(x) = 4x – 4

3) f(x) = 3x – 10

4) f(x) = 1 – 5x

5) $f(x) = \frac{3x-6}{7-x}$

6) $f(x) = \frac{5x+8}{1-4x}$

Sesión 4

Los temas a revisar el día de hoy son:

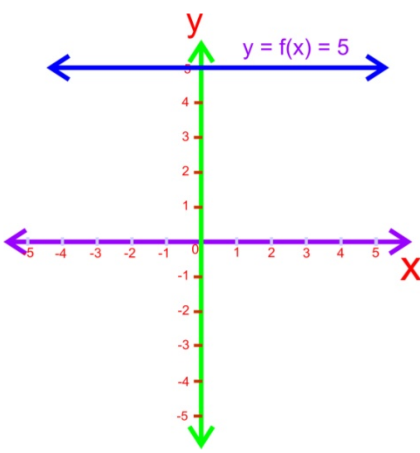
Funciones Especiales

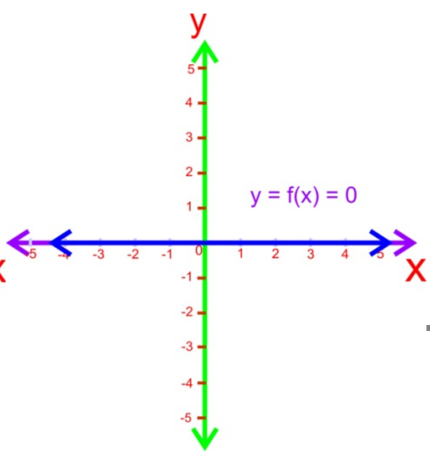
En lo que ya has visto hasta ahora, seguramente has advertido la gran variedad de funciones y algunas de sus características y propiedades, ahora, verás algunas funciones especiales las cuales poseen algunas características muy particulares, que te ayudarán a reconocerlas con facilidad.

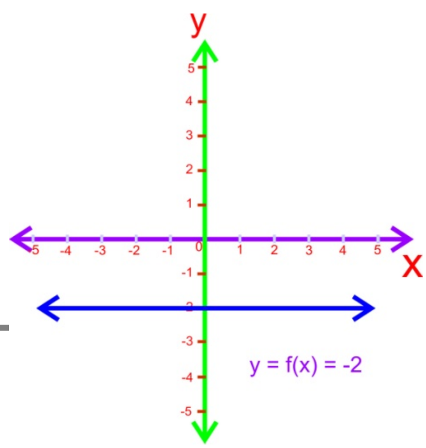
1.3.5.3. Función constante, función identidad, función valor absoluto, función racional y función escalonada

Función constante

Este tipo de función, como su nombre lo indica, está definida por una constante, *f(x)* = c, en donde "c" es un número de los números reales. Su gráfica es una recta horizontal paralela al eje "x". Observa las siguientes gráficas.







D= {x ⍰ R}
R= {y ⍰ R/ y = 5}

D= {x ⍰ R}
R= {y ⍰ R/ y = 0}

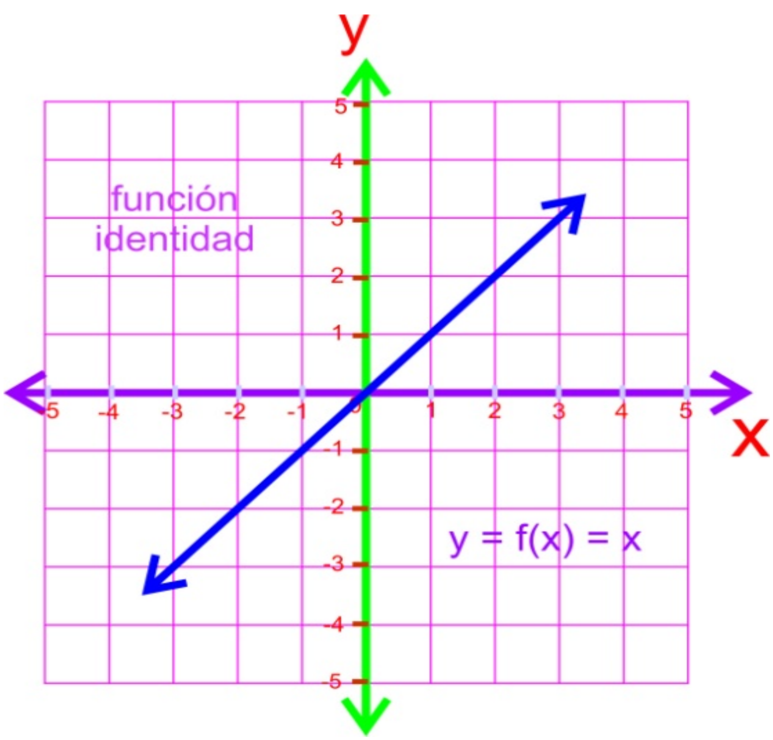
D= {x ⍰ R}
R= {y ⍰ R/ y = –2}

Función Identidad

Es la función que se define como f(x) = x, este tipo de función es la que se obtiene al hacer la composición de una función con su inversa, y has de haber advertido que los elementos que componen las parejas ordenadas de la función identidad son iguales, es decir, el valor de “x” es el mismo valor de “y”.

Al analizar dicha función, se observa claramente que pasa por el origen, que tiene una pendiente igual a 1 y tiene una inclinación de 45º.

Observa la siguiente gráfica y advierte las características mencionadas.



D= {x ⍰ R}   y   R = {y ⍰ R}

Función Racional

Es la función que se representa mediante el cociente de dos polinomios, del tipo:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}; \qquad h(x) \neq 0$$

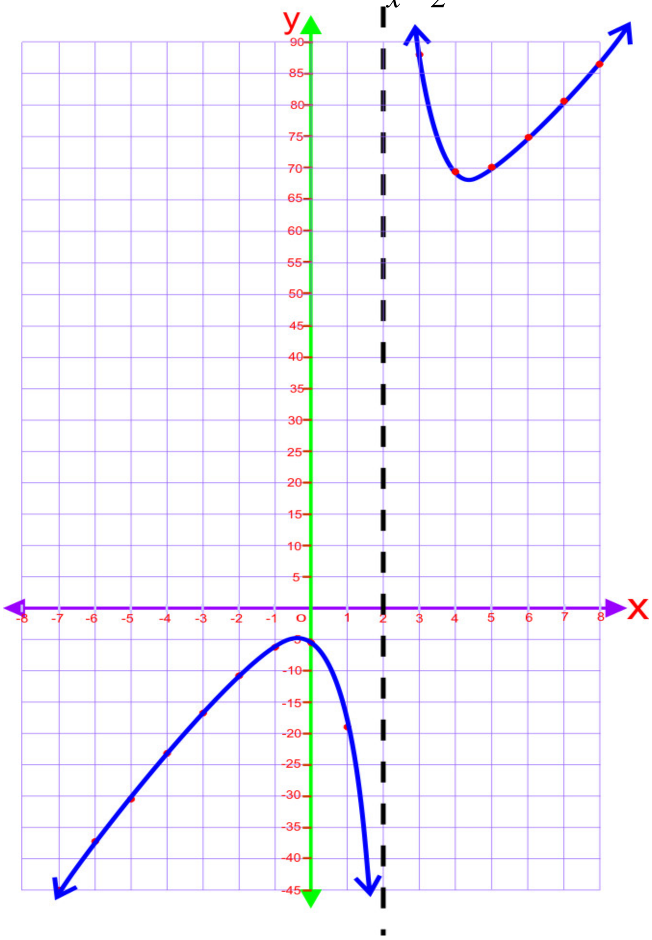
Dicho tipo de funciones tiene la particularidad de considerar su denominador como distinto de cero, por lo cual es necesario obtener los valores de "x", si hay, para los cuales dicha función no existe.

Por ejemplo:

Ecuación:

$$f(x) = \frac{8x^2 + 11}{x - 2}$$

"x"	f(x)
-8	-52.3
-7	-44.78
-6	-37.38
-5	-30.14
-4	-23.16
-3	-16.6
-2	-10.75
-1	-6.33
0	-5.5
1	-19
2	Indeterminado
3	83
4	69.5
5	70.3
6	74.75
7	80.6



En este tipo de funciones se generan asíntotas, es decir, rectas que toman el valor que no puede tomar la variable independiente en la función.

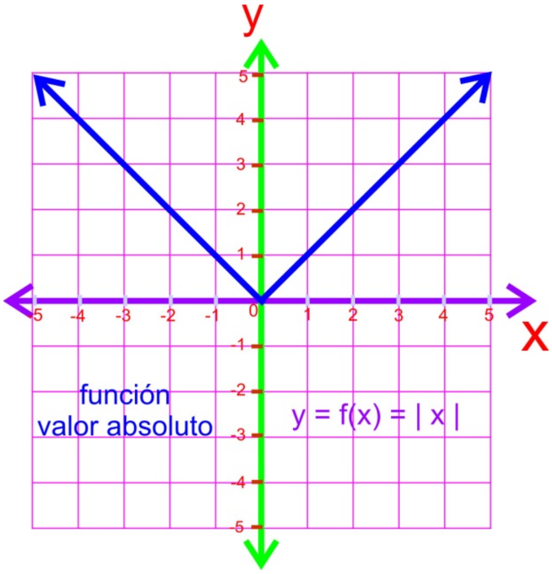
Dominio = $\{x \in R / x \neq 2\}$

Función Valor Absoluto

Ya que el valor absoluto representa la distancia del origen a un número “x” y que siempre su resultado es un valor positivo, la función valor absoluto se define como sigue:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Y su representación gráfica queda determinada como:



Como ya se mencionó, esta función devuelve siempre el valor positivo de un número, por lo que su dominio y rango están determinados como sigue:

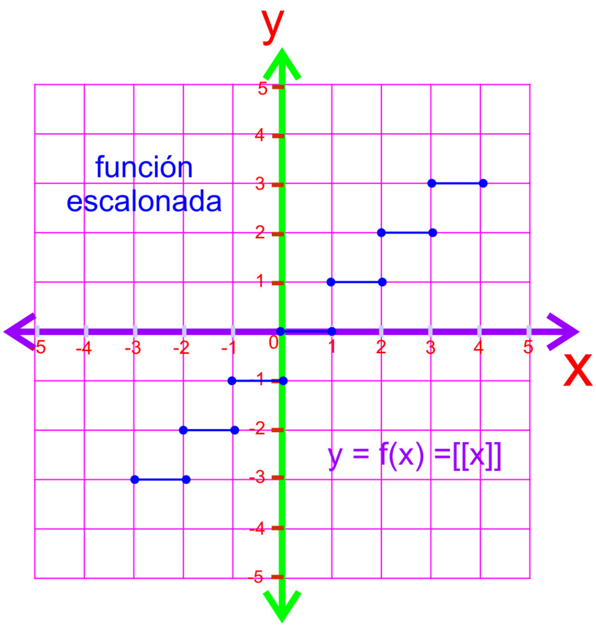
Dominio = {x ∈ R}
Rango = {y ∈ R / y ≥ 0}

Función Escalonada

Este tipo de función es una función que gráficamente está definida en trozos constantes en cada uno de los subintervalos donde está definida.

Así pues, una función escalonada es del tipo siguiente:

$$f(x) = [\![x]\!] \begin{cases} -3, & -3 \leq x \leq -2 \\ -2, & -2 \leq x \leq -1 \\ -1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 2, & 2 \leq x \leq 3 \\ 3, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



El dominio y rango de la función son:
Dominio = {x ∈ R/ - 3 ≤ x ≤ 4}
Rango = {y ∈ R / -3 ≤ y ≤ 3}

Práctica 10

Dadas las siguientes funciones, obtén el dominio y rango de la misma, grafica e identifica el tipo de función del que se trata.

1) $y = -1/2$

2) $f(x) = |x^2 - 1|$

3) $y = 3$

4) $f(x) = \left|\frac{2}{x-1}\right|$

5) $y = 7/\,3x$

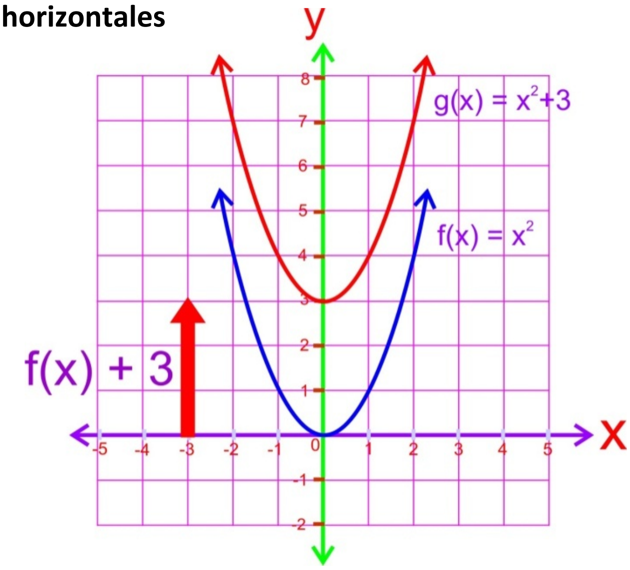
6) $4y = 4x$

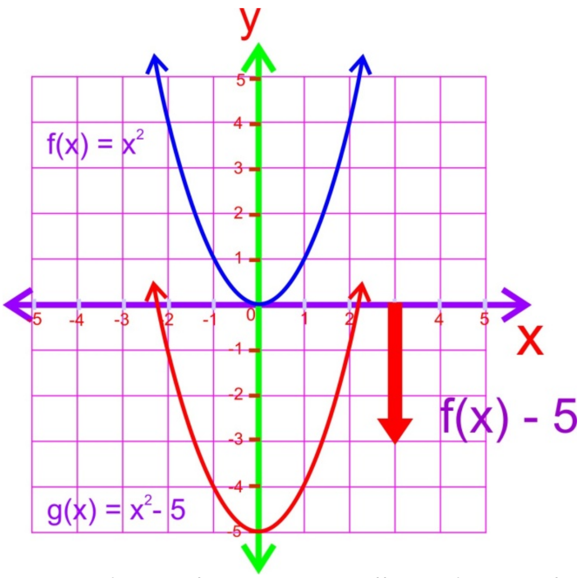
1.3.6. Transformación de gráficas de funciones

Una función f(x) cuando se le agrega o resta un valor constante, así como su representación algebraica se modifica también su representación gráfica inicial, cambia de diferentes maneras, dependiendo del valor de la constante. Cuando esto ocurre se le conoce como **transformación** y dicha transformación puede ser un desplazamiento sobre el eje de las "x" o sobre el eje de las "y".

1.3.6.1. Transformaciones verticales y horizontales

Entonces, dada una función f(x), al agregarle un valor constante "c", con c > 0, se obtiene una nueva función g(x) = f(x) + c, cuya gráfica se desplaza "c" unidades hacia arriba de la función f(x). Observa la gráfica de la derecha.

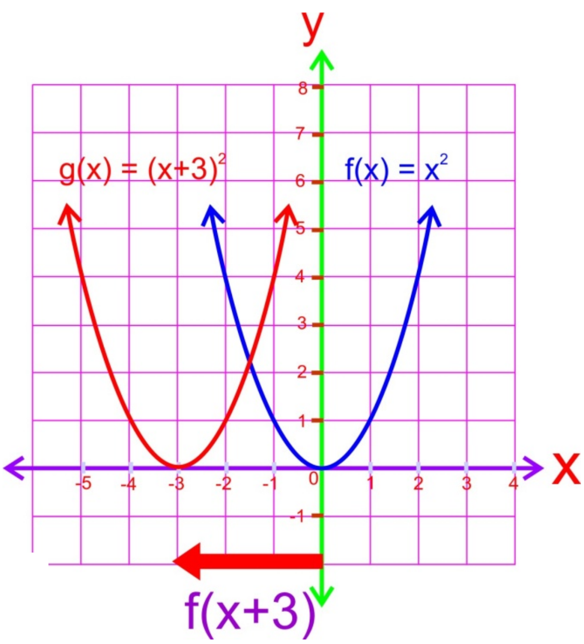


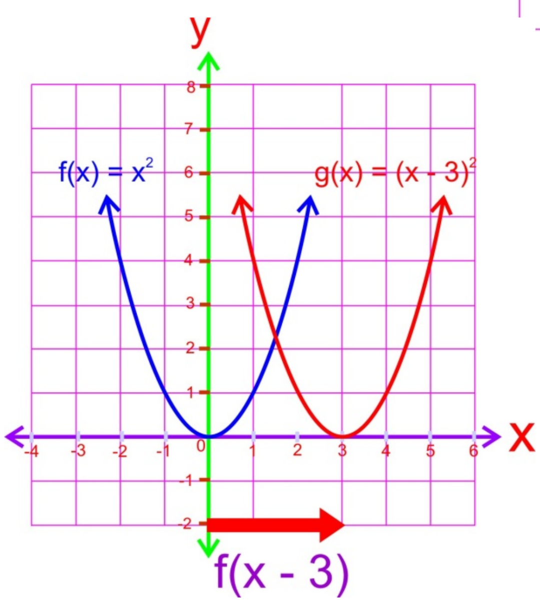


En el caso de que se le reste un valor constante “c”, con c >0, entonces la nueva función g(x) = f(x) – c se desplaza “c” unidades abajo de la función f(x). Observa la gráfica de la izquierda.

Este tipo de traslaciones son llamadas traslaciones verticales, ¿de qué tipo son las traslaciones horizontales?

En el caso de que dada la función f(x), se le agrega un valor constante “c” mayor que cero a la variable independiente, se obtiene como función g(x) = f(x + c) y su gráfica se desplaza hacia la izquierda de la función f (x). Observa la gráfica de la derecha.





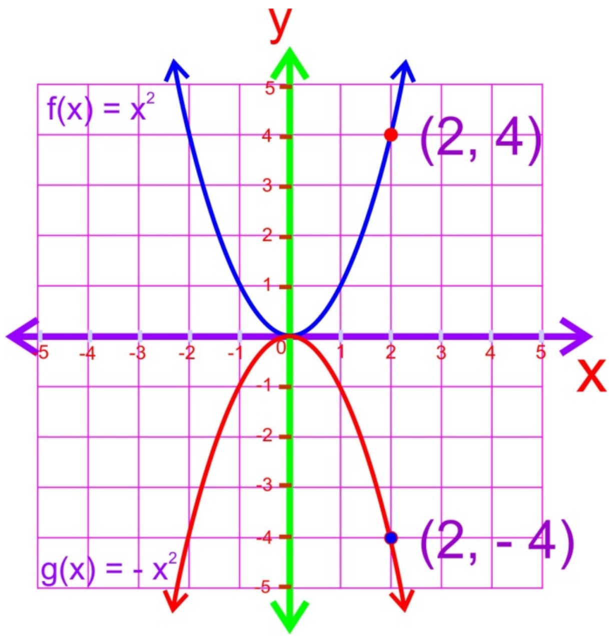
En el caso de que dada la función f(x), se le resta un valor constante “c” mayor que cero a la variable independiente, se obtiene como función g(x) = f(x – c) y su gráfica se desplaza hacia la derecha de la función f(x). Observa la gráfica de la izquierda.

Este tipo de traslaciones son llamadas traslaciones horizontales. Si has observado bien, en las traslaciones, la forma de la gráfica no cambia en ningún caso, solamente, cambia de posición (arriba, abajo, derecha, izquierda), éstas son características propias de la traslación.

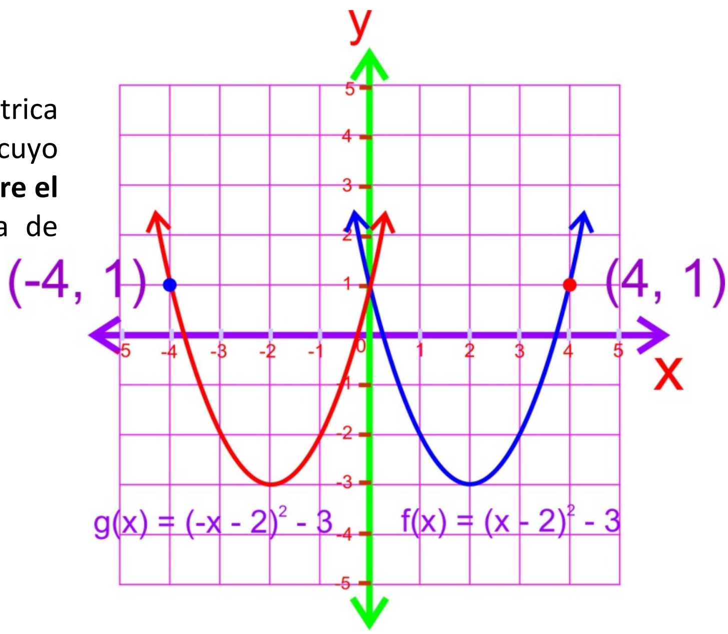
1.3.6.2. Reflexiones respecto a los ejes

Algunas gráficas, sobretodo de las que ya has trabajado, a simple vista parece que se repiten arriba y abajo, izquierda o derecha, esto se debe a una propiedad que poseen ciertas figuras geométricas la cual es conocida como simetría.

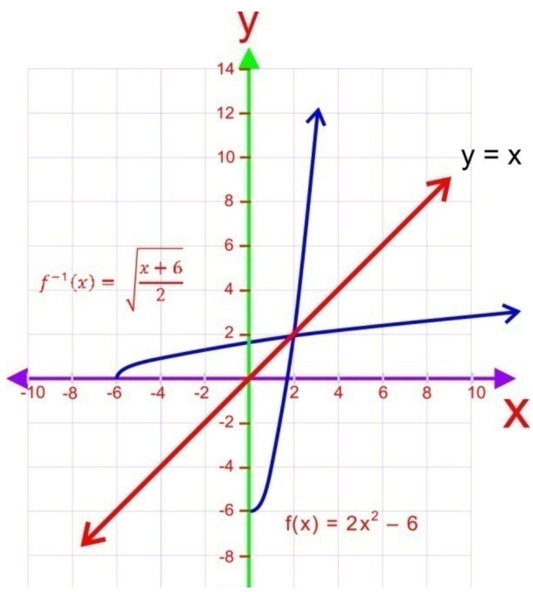
Si tienes una función f(x), su función simétrica correspondería a la función **g(x) = - f(x)**, en cuyo caso también se le conoce como **reflexión sobre el eje de las "x".** Observa la siguiente gráfica de funciones.



Si tienes una función f(x), su función simétrica correspondería a la función **g(x) = f(-x)**, en cuyo caso también se le conoce como **reflexión sobre el eje de las "y"**. Observa la siguiente gráfica de funciones.



Además de este tipo de reflexiones, existe otro que trabajaste iniciando este curso, se trata de una función f(x) y su función inversa, ambas son simétricas respecto a la función identidad f(x) = x. Observa la siguiente gráfica de funciones.



Práctica 11

Resuelve los siguientes ejercicios y grafica.

1) Obtén la traslación vertical de 5 unidades positivas de la función $h(x) = 3x^2 - 6$
2) Determina la función de reflexión sobre el eje de las "x" de la función $f(x) = -x^4$
3) Desplaza 7 unidades hacia la izquierda de la función $y = 2x^3 - 9$
4) Grafica la función de reflexión sobre la función identidad de $g(x) = 4x^2 - 8x$
5) Obtén la traslación hacia abajo 9 unidades de h(x) = sen x
6) Determina la función de reflexión sobre el eje de las "y" de la función $f(x) = 3x^5$

1.4. Funciones Polinomiales de grado 0, 1 y 2

Si recuerdas bien, este tipo de funciones se encuentra clasificado dentro de las funciones algebraicas, justamente porque se trata de funciones que implican expresiones algebraicas y en este caso en particular se trata de expresiones algebraicas polinomiales.

Recuerda que una expresión algebraica es una agrupación de términos formados por combinaciones de letras y números y separados por medio de signos (+) o (-), ordenados en forma decreciente.

1.4.1. Características de una función polinomial

1.4.1.1. Notación

En el caso de una función polinomial, el polinomio que implica está dado en una sola variable que ha sido igualado a “y” o “f(x)” dándoles forma de ecuación con el fin de establecer una relación.

La notación de una función polinomial expresada en su forma general es del tipo:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

en donde $a_n \neq 0$ y “n” pertenece a los enteros positivos.

<u>Ejemplo</u>: $3x^4 - x^2 + 5x - 9$

1.4.1.2. Grado de una función polinomial

En tus cursos anteriores has determinado como el grado de una expresión polinomial al mayor exponente de las variables que la componen.

Particularmente en el caso de una función polinomial ocurre lo mismo, su grado queda determinado por el mayor exponente que contenga la variable. En el caso de la forma general su grado correspondiente es “n”.

<u>Ejemplos</u>:

$4x^7 - x^4 + 3x^2 - 2x$ grado: 7

$2x^2 + 3x + 6$ grado: 2

$5x + 7$ grado: 1

En términos generales las funciones polinomiales se clasifican según su grado como sigue:

Función constante	$f(x) = a$	Grado 0
Función lineal	$f(x) = ax + b$	Grado 1
Función cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Grado 2

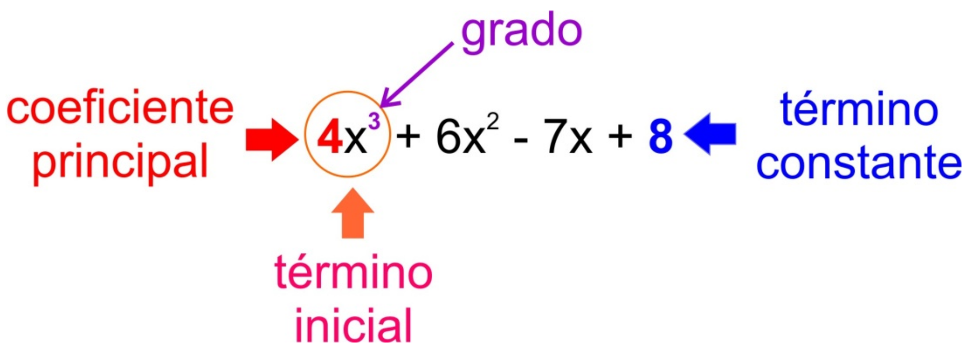
Función cúbica	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Grado 3

No todas las funciones presentan todos los términos que corresponderían según su grado, algunas presentan hasta sólo un término.

1.4.1.3. Coeficiente principal

El **coeficiente principal** de una función polinomial corresponde al número que acompaña al término de mayor exponente, es decir, aquel que contiene el grado mayor. Si la expresión está ordenada en forma decreciente, entonces el coeficiente principal se encuentra ubicado en el término llamado inicial.

Así mismo, el término que no posee variable y el cual regularmente se encuentra al final se le conoce como **término constante o término independiente**.



Ejemplos:

Función	Grado	Coeficiente principal	Término constante
$f(x) = 5x^6 - 8x^3 + 14$	6	5	14
$f(x) = x^2 + 6$	2	1	6
$f(x) = 7x^4 + 5x^3 - 9x^2$	4	7	0

1.4.1.4. Dominio y Rango de las funciones polinomiales

Si analizas la ecuación de una función polinomial advertirás implícitamente que la variable independiente no se encuentra restringida de ninguna manera, por lo que libremente puedes determinar que ésta puede tomar cualquier valor de los números reales.

Lo anterior queda simbolizado de la siguiente manera:
Dominio D = $\{ x \in R \ / -\infty \leq x \leq \infty \}$

El rango de la función queda determinado según sea la función (constante, lineal cuadrática, etc.)

Práctica 12

I.- Completa correctamente la siguiente tabla según corresponda.

Función	Grado	Coeficiente principal	Término constante	Dominio	Rango
$f(x) = 2x^2 - x + 7$					
$y = 4x^3 + 6x^2 - x$					
$g(x) = 3x + 11$					
$y = x^3 - 5x + 6$					
$h(x) = 7x^2 - 6x + 1$					
$y = x^4 - 7x + 2$					
$f(x) = x^6$					
$y = x^6 + 5$					
$g(x) = x^5$					
$y = x^4$					

II.- Realiza la gráfica de cada una de las funciones anteriores.

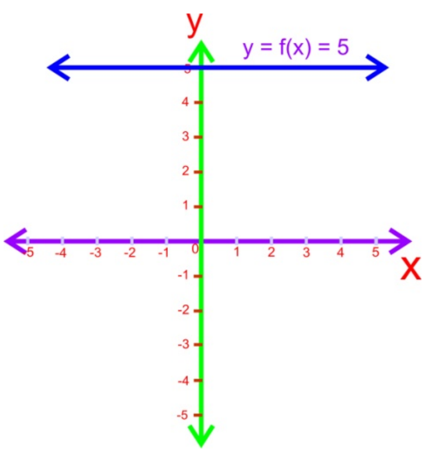
1.4.2. Clasificación de funciones

Dentro del mismo conjunto de funciones polinomiales se encuentran algunas que pudieran clasificarse según algunas características que poseen en particular, por ejemplo, las funciones polinomiales que se clasificaron según su grado.

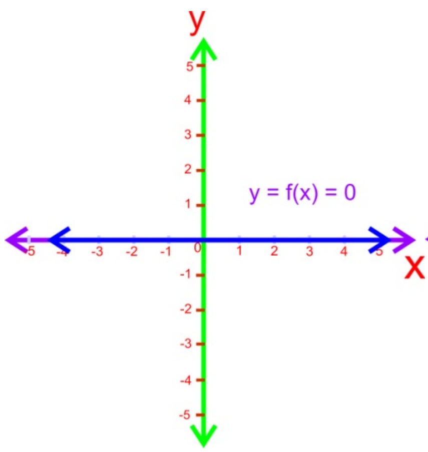
1.4.2.1. Funciones constantes ó de grado 0

La función constante la analizaste en el bloque anterior como una de las funciones que integran el conjunto de funciones especiales.

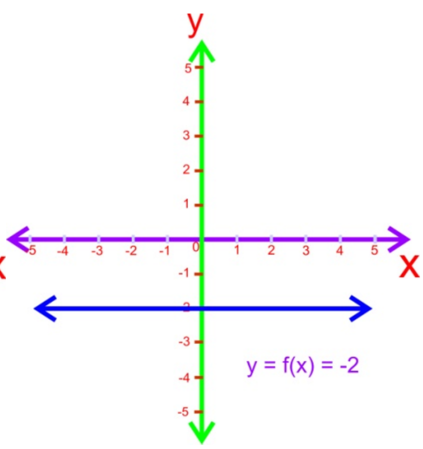
Este tipo de función pertenece a las funciones polinomiales, en donde el grado de dicha función corresponde al valor de cero, ya que no posee ninguna variable independiente sino que siempre se mantiene con una valor constante para todo valor del eje de las "x".
Como su nombre lo indica, está definida por una constante, $f(x) = cx^0$, en donde $x^0=1$ y "c" es un número de los números reales. Su gráfica es una recta horizontal paralela al eje "x". Observa las siguientes gráficas.



D= {x ∈ R}
R= {y ∈ R/ y = 5}



D= {x ∈ R}
R= {y ∈ R/ y = 0}



D= {x ∈ R}
R= {y ∈ R/ y = –2}

Como podrás observar el dominio de las funciones constantes siempre corresponde al conjunto de los números reales.

Mientras que el rango de dicho tipo de funciones se mantiene siempre constante según esté definida la función.

1.4.2.2. Funciones lineales ó de grado 1

Como el título lo indica, una función polinomial de grado 1 es considerada como una función lineal o de primer grado, debido a que su gráfica representa siempre una línea recta.

Así pues, una línea recta está definida como un lugar geométrico formado por un conjunto de puntos continuos que siempre mantienen la misma dirección o inclinación.

En su forma general la expresión que representa una **función lineal** es la siguiente:

$$f(x) = a_1x + a_0$$

Su forma algebraica es similar a la **ecuación pendiente-ordenada al origen** de la recta, determinada bajo la siguiente expresión:

$$y = mx + b$$

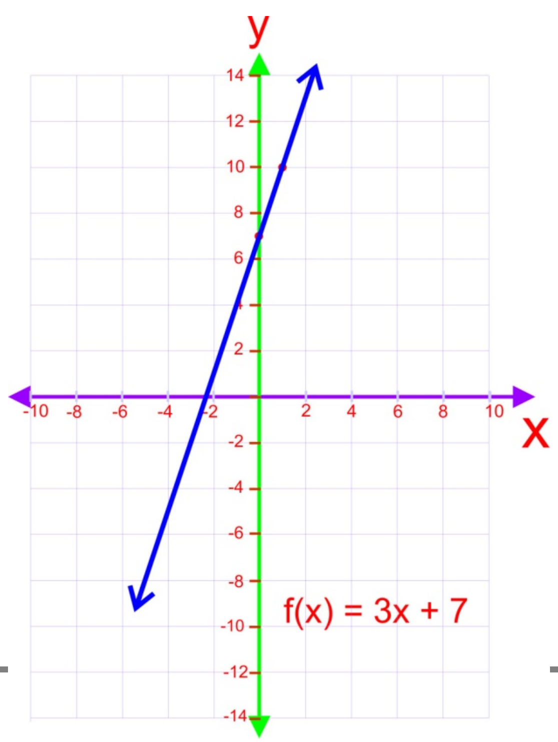
en donde los parámetros **m** y **b** corresponden respectivamente a la pendiente y la ordenada al origen.
La gráfica de una función lineal queda determinada mediante una línea recta como te lo muestra la siguiente imagen.

Parámetros de la función lineal

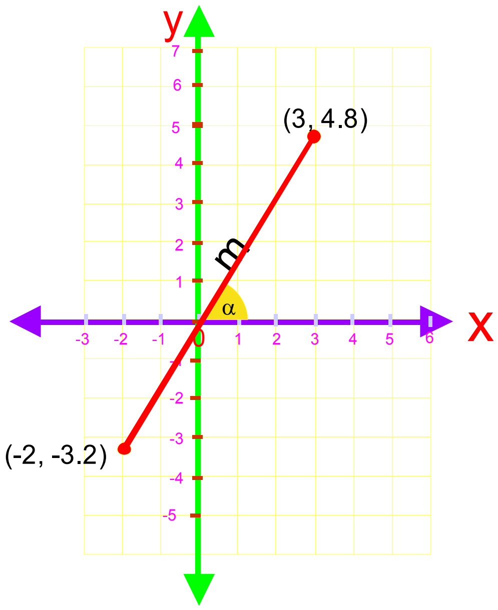
En la función f(x) = 3x + 7, los parámetros que intervienen son claramente la pendiente (m) y la ordenada al origen (b).

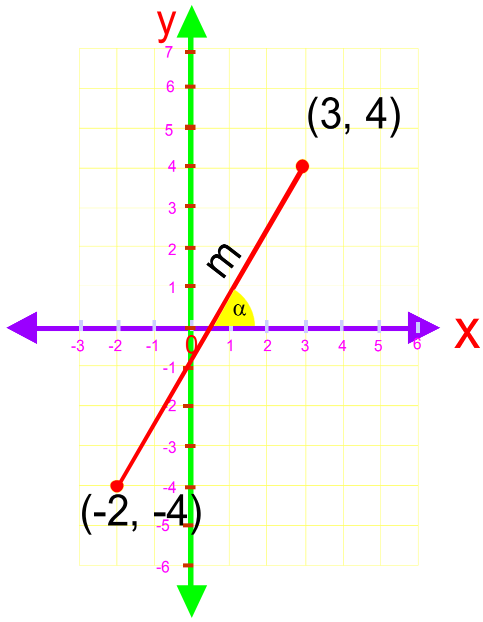
La pendiente (m) indica la inclinación de la recta, en este caso en particular m = 3, que corresponde al coeficiente de la variable independiente.

La ordenada al origen b = 7, indica el cruce de la recta con el eje de las “y”. Dicho valor corresponde a la única **raíz** que posee la función lineal.



Dichos parámetros (**m** y **b**) influyen de cierta manera en el comportamiento gráfico de una función lineal. Observa las siguientes gráficas.

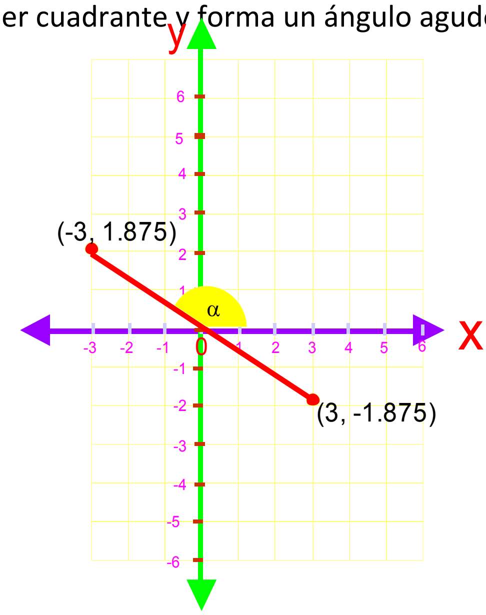


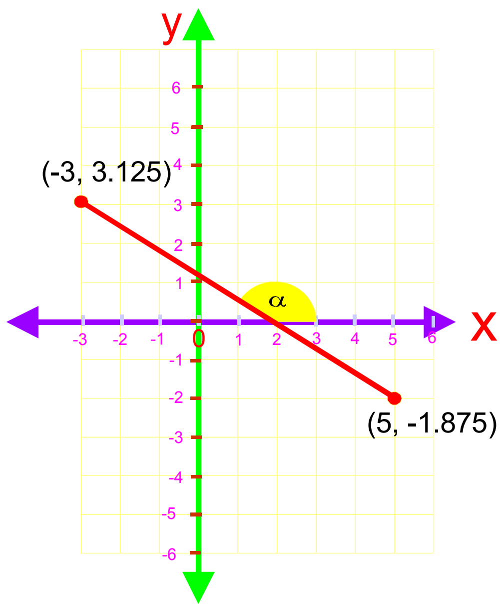


f(x) = 8x/5
m = 8/5
b = 0

f(x) = (8x – 4) / 5
m = 8/5
b = - 4/5

La pendiente en este tipo de funciones es positiva, por tal razón la gráfica pasa por el primer cuadrante y forma un ángulo agudo.





f(x) = -5x / 8
m = -5/8
b = 0

f(x) = (-5x + 10) / 8
m = -5 / 8
b = 5/4

La pendiente en este tipo de funciones es negativa, por tal razón la gráfica pasa por el segundo cuadrante y forma un ángulo obtuso.

Dominio y Rango de la función lineal

Como podrás observar en la gráfica de la función lineal, tanto el dominio como el rango de las rectas corresponden al conjunto de los números reales, y esto será válido para toda función lineal implícitamente. Por lo que:

Dominio D = {x ⍰ R / - ∞ ≤ x ≤ ∞ }
Rango R = { y ⍰ R/ - ∞ ≤ x ≤ ∞ }

Pendiente como razón de cambio en una función lineal
En sesiones anteriores analizaste la inclinación de una recta en el plano cartesiano, dicha inclinación la conoces como la pendiente de la recta, además, trabajaste dicha pendiente como la razón de cambio, es decir, el cambio vertical (elevación) en razón del cambio horizontal (desplazamiento).

La pendiente o razón de cambio está dada en función de dos puntos por donde pasa la recta bajo la siguiente forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{elevación}{desplazamiento} \qquad x_2 \neq x_1$$

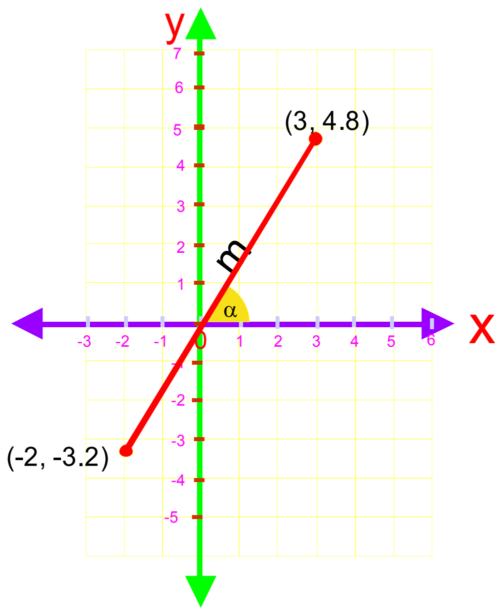
A través de la cual lograste obtener el ángulo de inclinación de la recta en el plano según la fórmula siguiente:

$$m = \tan \alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1} m$$

__Ejemplo:__

De la siguiente gráfica determina la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta.



De la fórmula de la **pendiente** de la recta:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Sustituye los valores correspondientes: $m = \frac{-3.2 - 4.8}{-2 - 3}$

Simplifica: $m = \frac{-8}{-5}$

¡Listo! $m = 1.6$

De la fórmula del **ángulo de inclinación**:

Sustituye el valor de la pendiente: $\alpha = \tan^{-1} m$

Aplica la función tangente inversa: $\alpha = \tan^{-1}(1.6)$

¡Listo! $\alpha = 57.9946^{\circ}$

Variación directa

Este tipo de funciones lineales, según sea su pendiente, su gráfica es continua creciente (pendiente positiva) o continua decreciente (pendiente negativa).

En el caso de la función y = mx + b se pueden presentar tres casos:

a) Si b = 0, la función se denomina función lineal o de **proporcionalidad directa**. Su gráfica pasa por el origen. **Estas funciones relacionan dos variables directamente proporcionales.**

b) Si **m** y **b** son distintas de cero, la función se llama función afín.

c) Si m=0, la función es constante y su gráfica corresponde a una recta paralela al eje de las “x”.

El tipo de ecuaciones como la del inciso a), se utiliza mucho para representar modelos matemáticos de situaciones reales, por **ejemplo**: el salario de un trabajador depende de manera directa de la cantidad de horas trabajadas, es decir, mientras más horas trabaje más alto será su salario, esto no es otra cosa sino una **variación directa.**

Práctica 13

Obtén el valor de la pendiente, el ángulo de inclinación, el valor de la ordenada al origen y realiza la gráfica de cada una de las siguientes funciones lineales. Indica cuáles de entre ellas se pueden identificar como variaciones directas.

1) $2y + 6x - 4 = 0$
2) $3x + 5 = y$
3) $6x - 2y = 9$
4) $x - y = -2$
5) $7x + y = 3$
6) $x - 4y = 2$
7) $3x - 2y = 8$
8) $y + 7 = 0$
9) $3y - 5 = 4$
10) $2x - 3y = 9$

Semana 2

Sesión 5

Los temas a revisar son:

1.4.2.3. Funciones cuadráticas o de segundo grado

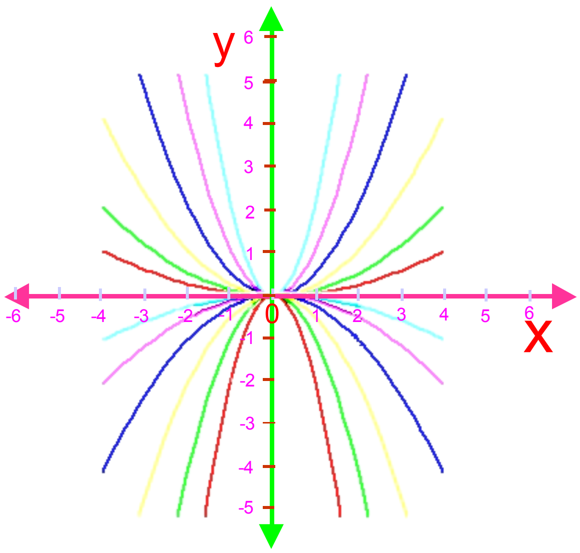
1.4.2.3. Funciones cuadráticas o de segundo grado

La forma general de una función cuadrática (función polinomial de segundo grado) está determinada bajo la siguiente forma:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

en donde **a, b** y **c** son constantes elementos del conjunto de los números reales y $a \neq 0$.

La gráfica que representa dicha función cuadrática es una **parábola** que abre sobre el eje de las "y" hacia arriba (si **a** es positiva, a > 0) o hacia abajo (si **a** es negativa, a < 0).



a > 0

a < 0

¿A qué se debe que algunas parábolas están más expandidas que otras?

Dominio y Rango de la función cuadrática
Su **dominio** corresponde al conjunto de los números reales cuando éste no está definido, el **rango** lo obtienes una vez que hayas calculado la ordenada del vértice (ordenada al origen).

Raíces de la función cuadrática

Ya que se trata de una función de segundo grado, el exponente indica el número de raíces que posee dicha función, en este caso, dos raíces. Dichas raíces corresponden a los valores en los cuales la gráfica se intercepta con el eje de las “y”.

Para obtener dichas raíces, si existen, aplicas los siguientes pasos:

a) Iguala a cero la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

b) Resuelves usando cualquiera de los siguientes métodos:

- Factorización
- Fórmula general
- Completar trinomios cuadrados perfectos

Factorización

$f(x) = 5x^2 – 25x + 30$

1º Iguala a cero la función

$5x^2 – 25x + 30 = 0$

2º Divide entre 5 toda la ecuación.

$x^2 – 5x + 6 = 0$

3º Factoriza

$(x – 3)\ (x – 2) = 0$

4º Iguala a cero cada binomio y despeja “x”

$x – 3 = 0$ $\qquad$ $x – 2 = 0$

$x = 3$ $\qquad$ $x = 2$

Fórmula General

$f(x) = 4x^2 + 5x + 1$

1º Iguala a cero la función

$4x^2 + 5x + 1 = 0$

2º Identifica las constantes **a, b** y **c.**

a = 4, b = 5 y c = 1

3º Sustituye dichos valores en la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(4)(1)}}{2(4)}$$

4º Simplifica

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{8}$$

$$x = \frac{-5 \pm 3}{8}$$

5º Separa en dos raíces

$$x_1 = \frac{-5+3}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{-5-3}{8} = \frac{-8}{8} = -1$$

Completar cuadrados

$f(x) = 4x^2 + 8x - 1$

1º Iguala a cero la función

$4x^2 + 8x - 1$

2º Despeja el término constante

$4x^2 + 8x = 1$

3º Divide entre 4

$x^2 + 2x = ¼$

4º Divide entre dos y eleva al cuadrado el coeficiente de “x”

$(2/2)^2 = 1$

5º Agrega tu resultado a cada miembro de la ecuación.

$x^2 + 2x + 1 = ¼ + 1$

6º Factoriza y simplifica

$(x + 1)^2 = 5/4$

7º Iguala a cero

$4(x + 1)^2 - 5 = 0$

La obtención de las raíces de este tipo de ecuación lo verás enseguida.

Forma estándar de la función cuadrática

Como ya lo viste anteriormente, la ecuación de una función cuadrática está dada bajo la siguiente forma:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

en donde **a, b** y **c** son constantes elementos del conjunto de los números reales y $a \neq 0$.

- Si haces a= 1, b = 0 y c = 0, tienes la **forma más simple de la función cuadrática**:

$$f(x) = x^2$$

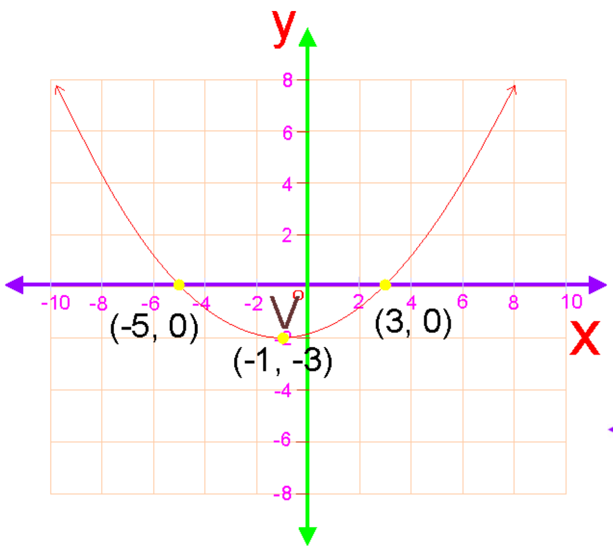
cuya gráfica es una parábola con vértice en el origen del plano cartesiano y cóncava hacia arriba.

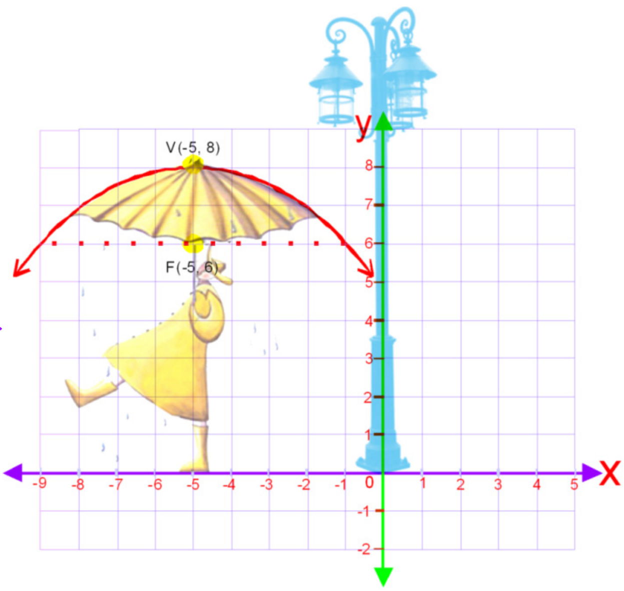
- Además, la función cuadrática puedes expresarla en su forma estándar, completando el trinomio cuadrado perfecto, bajo la siguiente forma:

$$\mathbf{f(x) = a\,(x - h)^2 + k}$$

su gráfica es una parábola con vértice en V(h, k) y es cóncava hacia arriba si a > 0 y cóncava hacia abajo si a < 0.

Observa las siguientes gráficas:





Parámetros de la función cuadrática
A través de la forma estándar puedes obtener el vértice y el eje de simetría de una función cuadrática:

a) El **vértice de una función cuadrática** lo obtienes mediante las siguientes fórmulas:

$$x = \frac{-b}{2a} \qquad\qquad y = \frac{4ac-b^2}{4a}$$

b) El **eje de la parábola** con el cual presenta simetría es una recta paralela al eje de las “y” y su valor está dado por la recta: $x = \frac{-b}{2a}$

c) Las **raíces de una función cuadrática** en su forma estándar se obtienen igualando a cero la ecuación: $x = \pm\sqrt{\frac{-k}{a}} + h$

Ejemplo:

Del ejercicio anterior: $f(x) = 4x^2 + 8x - 1$
$f(x) = 4(x + 1)^2 - 5$

1) Para determinar el **vértice** correspondiente a dicha parábola:

a) Identifica las constantes **a, b** y **c**

a= 4, b = 8 y c = –1

b) Sustituye dichos valores en la fórmula correspondiente para obtener las coordenadas del vértice de la parábola.

$x = \frac{-b}{2a}$ $\qquad x = \frac{-8}{2(4)}$ $\qquad x = -1$

$y = \frac{4ac-b^2}{4a}$ $\qquad y = \frac{4(4)(-1)-8^2}{4(4)}$ $\qquad y = \frac{-80}{16}$

Por lo tanto, las coordenadas del vértice de la parábola son V(–1, –5).

2) Para obtener las raíces de la función cuadrática, $f(x) = 4(x + 1)^2 - 5$

a) Obtén los valores necesarios a partir de la ecuación en su forma estándar.

a = 4, h = –1 y k = –5

b) Sustituye los valores correspondientes en la siguiente fórmula:

$x = \pm\sqrt{\frac{-k}{a}} + h$ $\qquad x = \pm\sqrt{\frac{-(-5)}{4}} + (-1)$ $\qquad x = \pm\sqrt{1.25} - 1$

$x_1 = 1.1 - 1 = 0.1$ $\qquad x_2 = -1.1 - 1 = -2.1$

Máximos y mínimos

Si tienes una función estándar $f(x) = a(x - h)^2 + k$, el valor máximo o mínimo de f(x) ocurre cuando x = h.

Del ejemplo anterior se sigue que:

x = –1, es el valor mínimo de la función cuadrática.

Práctica 14

I.- Grafica las siguientes parábolas, encuentra sus raíces y las coordenadas de su vértice por el método que prefieras, además indica si la parábola tiene máximo o mínimo.

1) $y = x^2 + 5x - 6$

2) $y = -x^2 + 5x - 6$

3) $y = 4x^2 + 7x - 2$

4) $y = 5x^2 + 5x$

5) $y = -x^2 + 36$

Sesión 6

Los temas a revisar son:

1.5. Funciones Polinomiales de grado 3 y 4
- **1.5.1. Características de una función polinomial de grado 3 y 4**
- **1.5.2. Comportamiento gráfico de las funciones polinomiales grado 3 y 4**
- **1.5.3. Raíces (ceros) reales de funciones polinomiales de grado 3 y 4**

1.5. Funciones Polinomiales de grado 3 y 4

El comportamiento de la gráfica de las funciones polinomiales, como lo has estado advirtiendo hasta el momento depende directamente de su grado y coeficiente principal.

Las funciones polinomiales de grado 3 y 4, a diferencia de las funciones anteriores, requieren de un método específico para la obtención de sus raíces cuando no son factorizables.

Te reto a advertir la forma de encontrar las raíces de funciones polinomiales mayores de 4 grados, a partir de lo que verás a continuación.

1.5.1. Características de una función polinomial de grado 3 y 4

Al igual que las funciones polinomiales de grado 0, 1 y 2, esta clase de funciones posee también su grado, coeficiente principal, término independiente, su dominio y rango, la siguiente tabla muestra un ejemplo de una función de grado 3 y una de grado 4 con sus respectivos parámetros, una vez que hayas advertido su particularidad, completa el cuadro para la segunda función adjunta.

Función	Grado	Coeficiente principal	Término constante	Dominio	Rango
1) $f(x) = -2x^3 - x^2 + 7$	3	- 2	7	reales	reales
2) $y = 2x^3 + 8x - 3$					
3) $g(x) = 3x^4 + 11x^3 - 5x^2 + 1$	4	3	1	reales	[-98, +∞)
4) $y = - 3x^4 + x$					

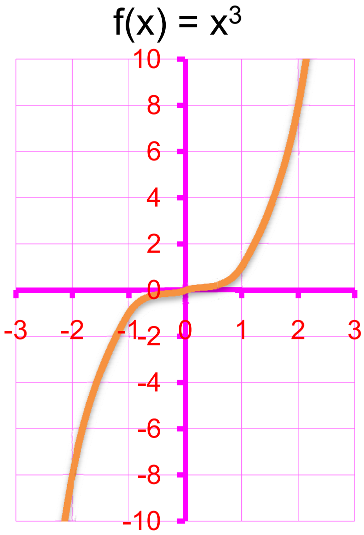
1.5.2. Comportamiento gráfico de las funciones polinomiales grado 3 y 4

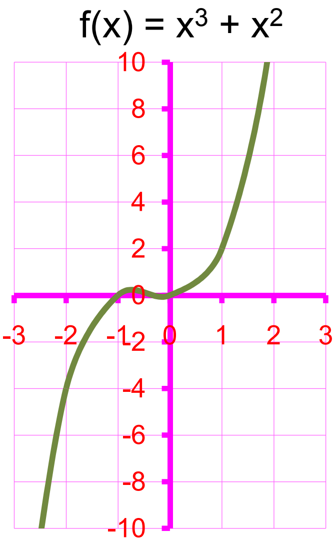
Una característica que puedes advertir fácilmente en este tipo de funciones es que la gráfica de las funciones polinomiales siempre es continua, es decir, no tiene interrupciones. Analiza particularmente las funciones de grado 3 y 4.

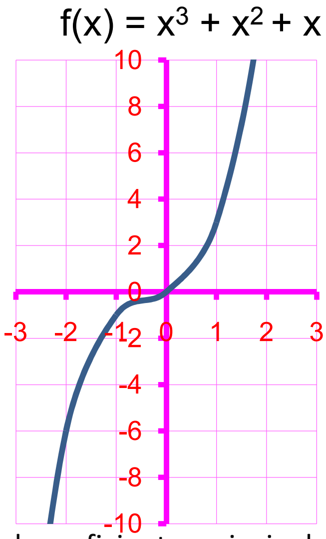
Funciones de grado 3

Para advertir la forma general que tiene una función polinomial de grado 3 en el plano cartesiano, es importante que traces algunas gráficas con parámetros diferentes.
Las funciones que tienen la gráfica más sencilla son las llamadas monomios (polinomios de sólo un término) del tipo: $f(x) = x^n$, en donde $n > 0$.

Observa el comportamiento gráfico de la función cúbica al modificar sus parámetros.

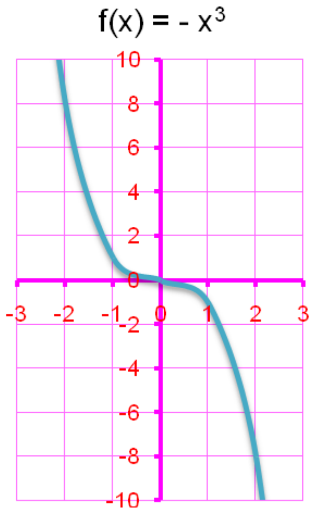


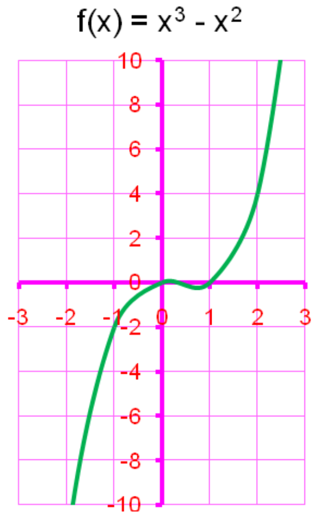


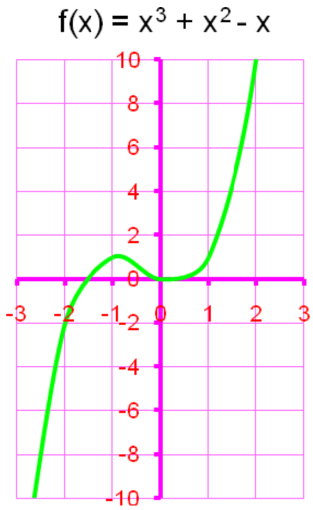


Observas que la gráfica de cualquier función cúbica con el coeficiente principal positivo, tienen la misma forma, crecen al infinito a la derecha y decrecen al menos infinito a la izquierda.

Cuando cambias de signo el coeficiente principal de la función polinomial cúbica,

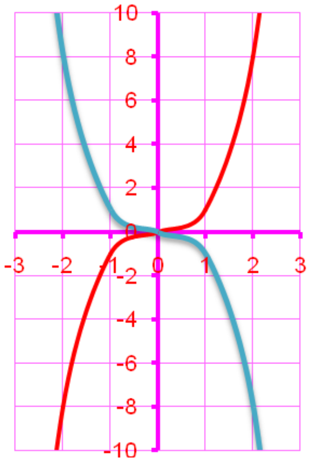




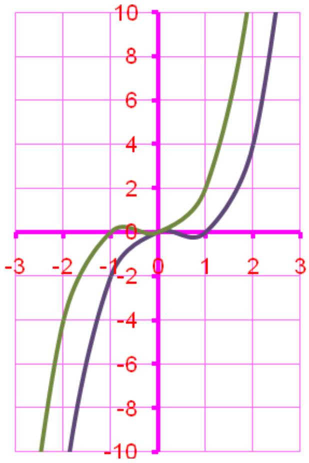


la gráfica cambia completamente, la invierte, efecto que no ocurre al cambiar de signo cualquier otro coeficiente de los términos que componen la función cúbica.

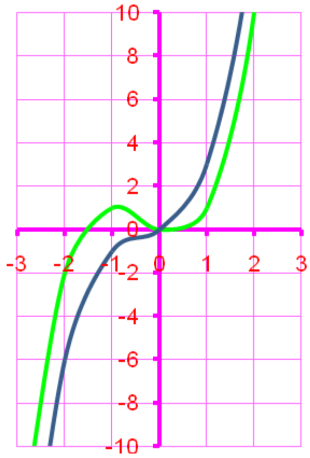
El cambiar de signo cualquier coeficiente (excepto el coeficiente principal) de la función polinomial modifica la gráfica inicial, pero sin invertirla.
Observa la gráfica inicial y modificada en el mismo plano.



$f(x) = x^3$
$f(x) = -x^3$



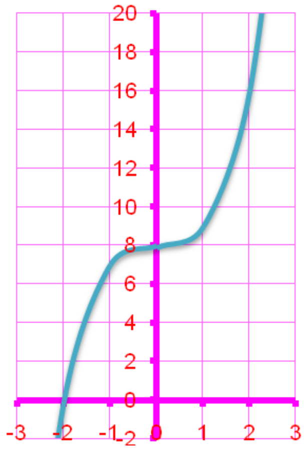
$f(x) = x^3 + x^2$
$f(x) = x^3 - x^2$



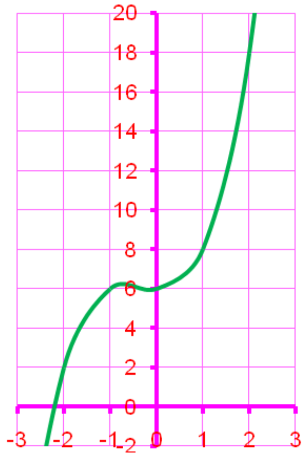
$f(x) = x^3 + x^2 + x$
$f(x) = x^3 + x^2 - x$

Si a la función polinomial cúbica inicial le agregas o restas una constante, la gráfica cambia según sea el caso, observa con atención.

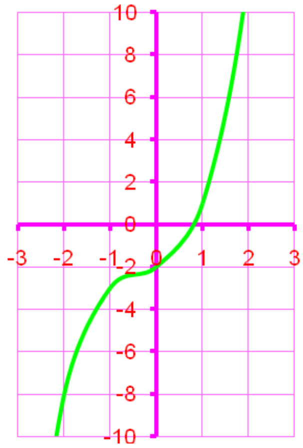
$f(x) = x^3 + 8$



$f(x) = x^3 + x^2 + 6$



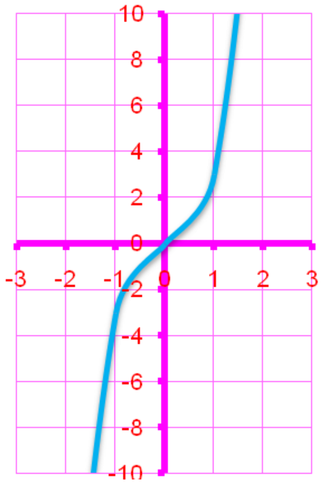
$f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$



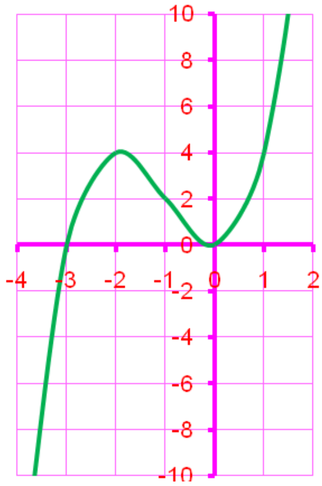
Observas que la gráfica de las funciones cúbicas se traslada verticalmente hacia arriba o hacia abajo según fue la constante.

¿Qué ocurre si multiplicas la función inicial por una constante?

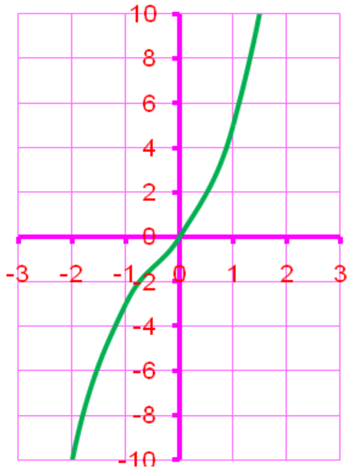
$f(x) = 3x^3$



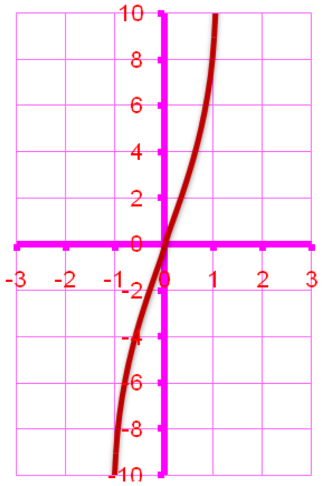
$f(x) = x^3 + 3x^2$



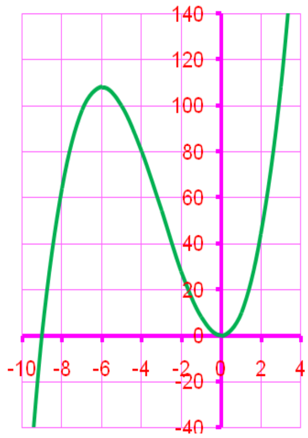
$f(x) = x^3 + x^2 + 3x$



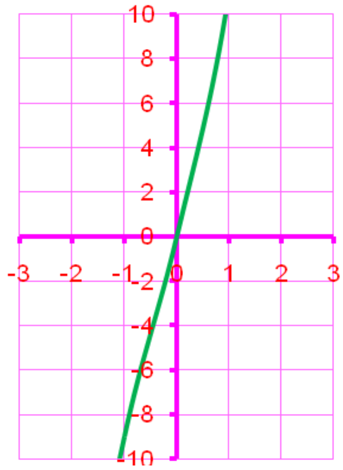
$f(x) = 9x^3$



$f(x) = x^3 + 9x^2$



$f(x) = x^3 + x^2 + 9x$



En este tipo de gráficas observas que mientras mayor sea la constante multiplicativa, la silueta de la gráfica será menos pronunciada, excepto en el caso de la función con aumento en la variable cuadrática.

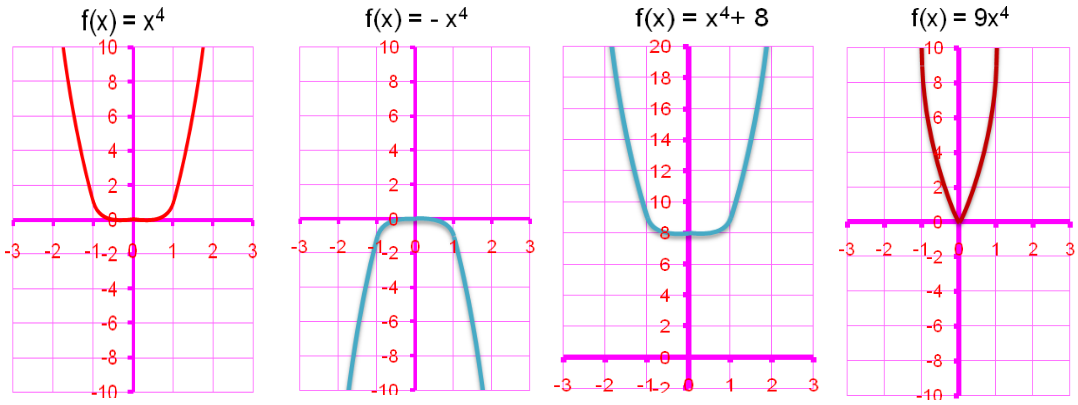
Una particularidad de la función cúbica es que al ser su grado impar, contiene en su dominio como en su rango números que van desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

¿Qué ocurre con las funciones de grado cuatro?

Funciones de grado 4

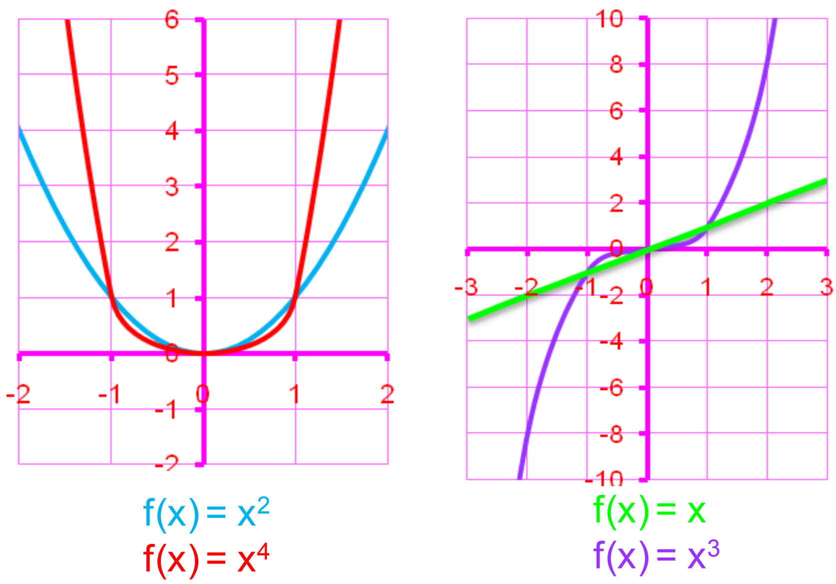
Para advertir la influencia de los parámetros en la gráfica de las funciones polinomiales de grado cuatro, es necesario, al igual como lo hiciste con las funciones polinomiales de grado 3, hacer pruebas modificando los parámetros de algunas funciones.

Observa las siguientes gráficas.



La gráfica de las funciones de grado cuatro se eleva sobre la izquierda y la derecha, es decir, crecen en ambos lados, a excepción de aquella cuyo coeficiente principal es negativo, decrece en ambos lados.

Con las gráficas de las funciones polinomiales de grado dos ocurre algo semejante, ¿lo recuerdas? Observa la función cuadrática y la de grado 4 en el mismo plano, además advierte el comportamiento de las funciones lineal y cúbica.

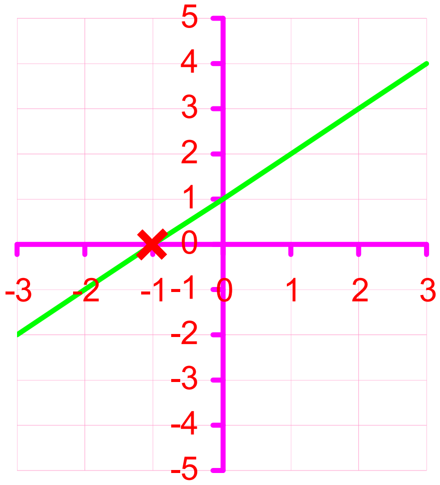


Ya lograste identificar que las funciones pares (2 y 4) tanto del lado izquierdo como derecho son ambas crecientes, y que las funciones impares (1 y 3) son crecientes del lado derecho y decrecientes del lado izquierdo. Esto ocurre cuando los coeficientes principales son positivos.

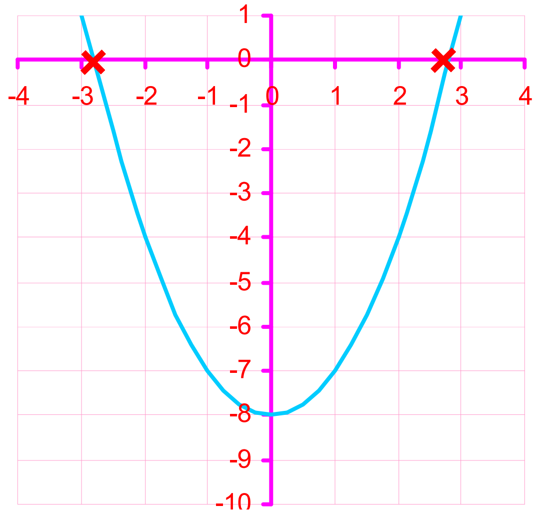
1.5.3. Raíces (ceros) reales de funciones polinomiales de grado 3 y 4

Las raíces reales de una función se obtienen cuando la función se hace 0, es decir $f(x) = 0$, en algunos casos son fáciles de apreciar en el plano cartesiano como las que se muestran a continuación.

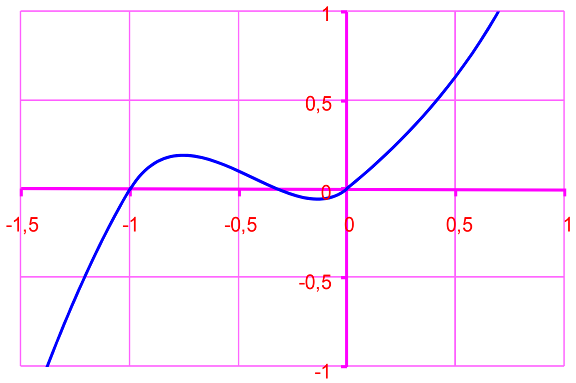
$f(x) = x + 1$



$f(x) = x^2 - 8$

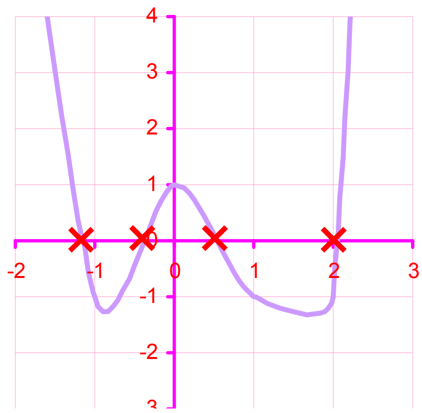


$f(x) = x^3 + x^2$



3 raíces

$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$



4 raíces

Las raíces se logran apreciar en cada cruce que tiene la gráfica con el eje de las “x”, y como has notado, el número de raíces de cada función corresponde al grado de la misma.

Características de la raíz de una función: Considera a la constante “a” como el cero o raíz de una función, siendo $a > 0$ y elemento del conjunto de los números reales.

Según las propiedades de la raíz se cumple lo siguiente:

1) $x = a$ es un cero o raíz de la función $f(x)$
2) $x = a$ es una solución de la ecuación polinomial $f(x) = 0$
3) $(x - a)$ es un factor de la función polinomial $f(x)$
4) $(a, 0)$ es una intersección en el eje de las "x" de la gráfica de $f(x)$

La obtención de dichas raíces te ayuda a identificarla con facilidad y además, a trazar un bosquejo de la gráfica de la función polinomial de manera más práctica y rápida.

Este método lo puedes emplear cuando la función polinomial cúbica carece del término independiente.

Ejemplo:

Encuentra los ceros de la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$ y traza su gráfica.

Para obtener las raíces de esta función polinomial, puedes realizarlo utilizando la factorización por el método de factor común, así que obtienes lo siguiente:

Recuerda que las raíces se obtienen cuando $f(x) = 0$ entonces iguala a cero la función dada:
$x^3 + 3x^2 + 2x = 0$

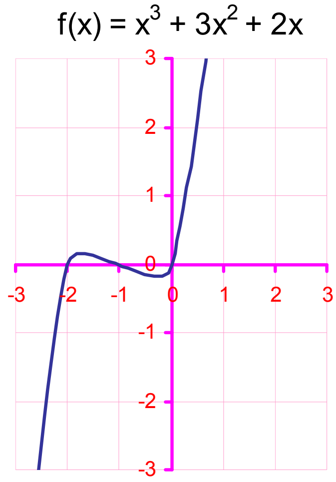
Identifica el factor común:
$x(x^2 + 3x + 2) = 0$

Factoriza la función cuadrática:
$x(x + 2)(x + 1) = 0$

Iguala a cero cada factor y despeja "x" en cada caso:
$\underline{x_1 = 0}$
$x + 2 = 0$ $\underline{x_2 = -2}$
$x + 1 = 0$ $\underline{x_3 = -1}$

Para trazar un bosquejo de la gráfica, sabes que las raíces de la función polinomial cúbica indican los cortes con el eje de las "x", además, como anteriormente lo aprendiste, una función cúbica con coeficiente principal positivo crece al infinito a la derecha y decrece al infinito a la izquierda.

De tal manera que su gráfica resulta la siguiente:



Práctica 15

I.- Encuentra las raíces de las siguientes funciones polinomiales, traza su respectiva gráfica marcando sus raíces, enuncia el dominio y rango de cada función.

1) $f(x) = 2x^2 + x – 15$

2) $f(x) = 11x + 30$

3) $h(x) = x^2 + 5x – 6$

4) $g(x) = 7x + 35$

5) $y = 12x^2 + 10x – 12$

Sesión 7

Los temas a revisar son:

1.5.4. Raíces (ceros) racionales de funciones polinomiales de grado 3 y 4

1.5.4. Raíces (ceros) racionales de funciones polinomiales de grado 3 y 4

Las ecuaciones que no pueden ser factorizables indican que no todas las funciones polinomiales tienen raíces reales, existen varios métodos que pueden mostrarte el tipo de raíces que posee tu función polinomial.

Uno de ellos es la llamada prueba del cero racional, la cual relaciona todas las raíces racionales posibles de un polinomio involucrando el coeficiente principal y el término independiente.

Dada una función polinomial de la forma: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, con los coeficientes enteros de la función, entonces, todos los ceros racionales de la función tienen la siguiente forma:

$$\text{Raíces racionales} = \frac{p}{q} = \frac{\text{factores del término independiente}}{\text{factores del coeficiente principal}}$$

p y **q** no tienen factores comunes distintos de **1** y **p**

Ejemplo 1:

Encuentra las raíces de la función $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + 7x + 4$

Para aplicar esta prueba, primero haces una lista con todos los factores del término independiente: $p = \{1, 2, 4\}$

Luego haces una lista con los factores del coeficiente principal: $q = \{1, 3\}$

Ahora, las posibles raíces racionales son

$$\frac{p}{q} = \pm\left\{1, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, 4, \frac{4}{3}\right\}$$

Ya que obtuviste las posibles raíces de la función polinomial, tienes que averiguar cuáles de ellas sí lo son. Lo anterior lo puedes resolver de distintas formas.

Una forma es evaluando cada posible raíz en la función inicial, y la que satisfaga la igualdad esa es raíz.

Si usas esta opción te resulta lo siguiente:

$3x^3 - 14x^2 + 7x + 4 = 0$		$x = 1$
Sustituye	$3(1)^3 - 14(1)^2 + 7(1) + 4 = 0$	
Desarrolla	$3 - 14 + 7 + 4 = 0$	
Simplifica	$0 = 0$	

Por lo tanto, $x_1 = 1$ es una raíz de la función.
Lo mismo tendrías que hacer para cada una de las posibles raíces y conocer las que hacen cero la función. Esto te tomaría muchísimo tiempo.

Otra forma es que habiendo encontrado una raíz, obtengas un factor y realices la división correspondiente con la función inicial, es decir:

De la función polinomial $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + 7x + 4$ obtuviste la raíz $x = 1$, el factor correspondiente es $(x - 1)$, por lo que divides la función f(x) entre $(x - 1)$.

Por lo tanto, la función inicial puede expresarse en su forma factorizada como sigue:

$f(x) = 3x^3 - 14x^2 + 7x + 4$
$f(x) = (x - 1)(3x^2 - 11x - 4)$

Para obtener las raíces faltantes sólo te queda factorizar la expresión cuadrática, puedes resolverlo por el método que mejor te convenga.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^2 - 11x - 4 \\
\hline
x - 1 & 3x^3 - 14x^2 + 7x + 4 \\
 & \underline{-3x^3 + 3x^2} \\
 & -11x^2 + 7x + 4 \\
 & \underline{11x^2 - 11x} \\
 & -4x + 4 \\
 & \underline{4x - 4} \\
 & 0
\end{array}
$$

Entonces, $3x^2 - 11x - 4 = 0$ se factoriza como $(3x + 1)(x - 4) = 0$
Iguala a cero cada factor $3x + 1 = 0 \quad x - 4 = 0$
despeja "x" $x_2 = -1/3 \quad x_3 = 4$

Por lo que las raíces de la función polinomial $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + 7x + 4$ son:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1/3,\ x_3 = 4$$

La división sintética es muy práctica y útil para la obtención de las raíces de una función polinomial, ésta consiste en tomar los coeficientes de cada término de la función acomodados en forma decreciente.

De la función polinomial $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + 7x + 4$ acomodas los coeficientes y tomas una de las posibles raíces $\frac{p}{q} = \pm\left\{1, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, 4, \frac{4}{3}\right\}$

Acomoda los coeficientes: Posible raíz

$$\begin{array}{rrrr|r} 3 & -14 & 7 & 4 & 1 \end{array}$$

2º Baja el coeficiente principal:

$$\begin{array}{rrrr|r} 3 & -14 & 7 & 4 & 1 \\ & & & & \\ \hline 3 & & & & \end{array}$$

3º Multiplica el coeficiente principal (3) por la raíz (1) y colócala bajo el segundo coeficiente:

3 x 1 = 3

$$\begin{array}{rrrr|r} 3 & -14 & 7 & 4 & 1 \\ & 3 & & & \\ \hline 3 & & & & \end{array}$$

4º Suma o resta la segunda columna:

$$\begin{array}{rrrr|r} 3 & -14 & 7 & 4 & 1 \\ & 3 & & & \\ \hline 3 & -11 & & & \end{array}$$

5º Multiplica tu resultado por la raíz y ponla bajo el tercer coeficiente:

$$\begin{array}{rrrr|r} 3 & -14 & 7 & 4 & 1 \\ & 3 & -11 & & \\ \hline 3 & -11 & & & \end{array}$$

6º Continúa así con el resto de los coeficientes:

$$\begin{array}{rrrr|r} 3 & -14 & 7 & 4 & 1 \\ & 3 & -11 & -4 & \\ \hline 3 & -11 & -4 & 0 & \end{array}$$

Cuando el residuo te resulta cero, indica que el número sí es raíz, si es diferente de cero concluyes que no lo es.

En este caso ya que obtuviste una raíz, los números que te resultaron al final de la división sintética corresponden a los coeficientes de una expresión cuadrática, factor de la función polinomial, es decir:

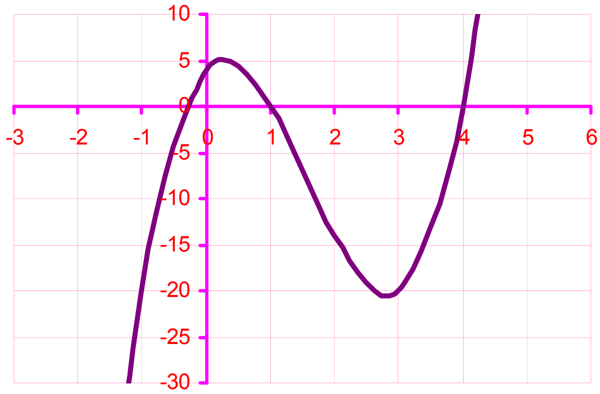
$f(x) =$ $f(x) = (x - 1)(3x^2 - 11x - 4)$

Teniendo la función cuadrática sólo factorizas para obtener el resto de las raíces. Este ejercicio ya se resolvió.

Nota: este método puede ser aplicable incluso cuando la función polinomial cúbica carece de algún término en su ecuación.

La gráfica de dicha función polinomial cúbica corresponde a la siguiente.

$f(x) = 3x^3 - 14x^2 + 7x + 4$



Ejemplo 2:

Encuentra las raíces de la función $f(x) = 4x^4 - 28x^3 - 76x^2 + 28x + 72$

Haz $f(x) = 0$, es decir: $4x^4 - 28x^3 - 76x^2 + 28x + 72 = 0$, luego, como todos sus coeficientes son divisores entre cuatro, divides todo entre ese número y te resulta, lo anterior es para simplificar la obtención de las raíces y evitar con cifras enormes:

$$x^4 - 7x^3 - 19x^2 + 7x + 18$$

Obtienes los factores del término independiente y del coeficiente principal:
Factores del término independiente: $p = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
Factores del coeficiente principal: $q = \{1\}$

Por lo tanto, las posibles raíces son: $\frac{p}{q} = \pm\{1,2,3,6,9,18\}$

Realizas la primera prueba con -1

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -7 & -19 & 7 & 18 & -1 \\ & -1 & 8 & 11 & -18 & \\ \hline 1 & -8 & -11 & 18 & 0 & \end{array}$$

Como el residuo resultó ser igual a cero, la raíz es válida, ahora, con los coeficientes resultantes te queda una ecuación cúbica:

$$x^3 - 8x^2 - 11x + 18 = 0$$

Para conocer sus raíces aplicas nuevamente la prueba de la división sintética, pero primero obtienes sus posibles raíces:

Factores del término independiente: p = {1, 2, 3, 6, 9,18}
Factores del coeficiente principal: q = {1}

Por lo tanto, las posibles raíces son: $\frac{p}{q} = \pm\{1,2,3,6,9,18\}$

Aplicas la prueba para la raíz 1

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -8 & -11 & 18 & 1 \\ & 1 & -7 & -18 & \\ \hline 1 & -7 & -18 & 0 & \end{array}$$

Como el residuo es cero, la raíz es válida y tu expresión resultante es un polinomio cuadrático por lo que puedes factorizar para obtener las dos raíces faltantes.

De la ecuación $x^2 - 7x - 18 = 0$, factorizas dicho trinomio cuadrado perfecto y obtienes:
$x^2 - 7x - 18 = (x - 9)(x + 2) = 0$

Igualas a cero cada factor y despejas "x", entonces:

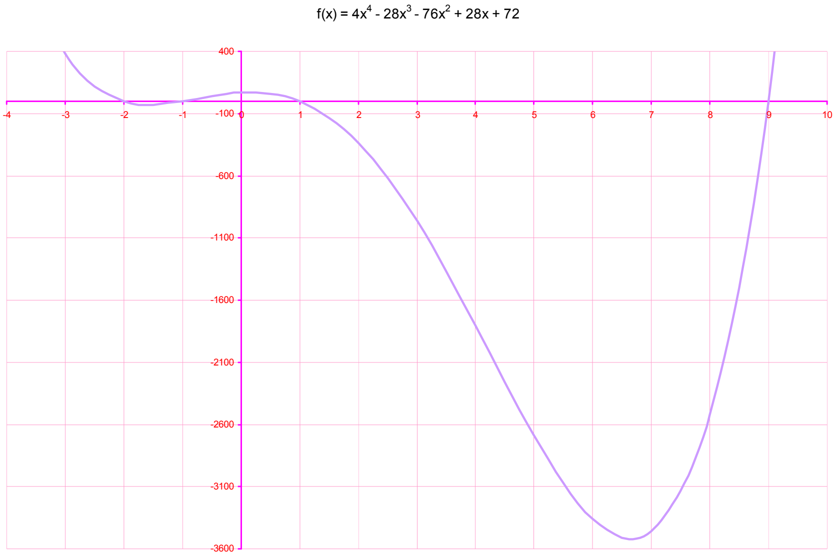
$$x - 9 = 0 \qquad\qquad x + 2 = 0$$
$$x = 9 \qquad\qquad x = -2$$

Concluyes que las raíces o ceros de la función polinomial cuádrica:

$$f(x) = 4x^4 - 28x^3 - 76x^2 + 28x + 72$$

$$\text{son : } x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 9,\ x_4 = -2$$

Su respectiva gráfica es la siguiente:



Práctica 16

Encuentra las raíces de las siguientes funciones polinomiales, traza su respectiva gráfica marcando sus raíces, enuncia el dominio y rango de cada función.

1) $f(x) = 2x^3 + 13x^2 - 36$

2) $f(x) = 6x^4 + 11x^3 - 94x^2 + 11x + 30$

3) $h(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$

4) $g(x) = 6x^4 - 19x^3 - 65x^2 + 43x + 35$

5) $y = 6x^4 - 31x^3 - 32x^2 + 11x + 6$

Sesión 8

Los temas a revisar el día de hoy son:

2. Funciones polinomiales factorizables

- **2.1. Teorema del residuo**
- **2.2. Teorema del factor**
  - **2.2.2. Raíces (ceros) racionales de funciones polinomiales**
- **2.3. Teorema fundamental del álgebra**
- **2.4. Teorema de la factorización lineal**

2. Funciones polinomiales factorizables

Ya aprendiste a obtener las raíces reales o racionales de una función polinomial de grado 3 y 4, ¿qué ocurre con las funciones de grado mayor a cuatro? ¿Cómo podrías obtener sus raíces de forma práctica?

Es importante que sepas que no todas las funciones polinomiales de grado mayor a cuatro pueden ser factorizables, tampoco, las funciones de grado menor igual a cuatro.

Algunos métodos que ya trabajaste antes te ayudarán para la solución de funciones polinomiales de grado mayor a cuatro.

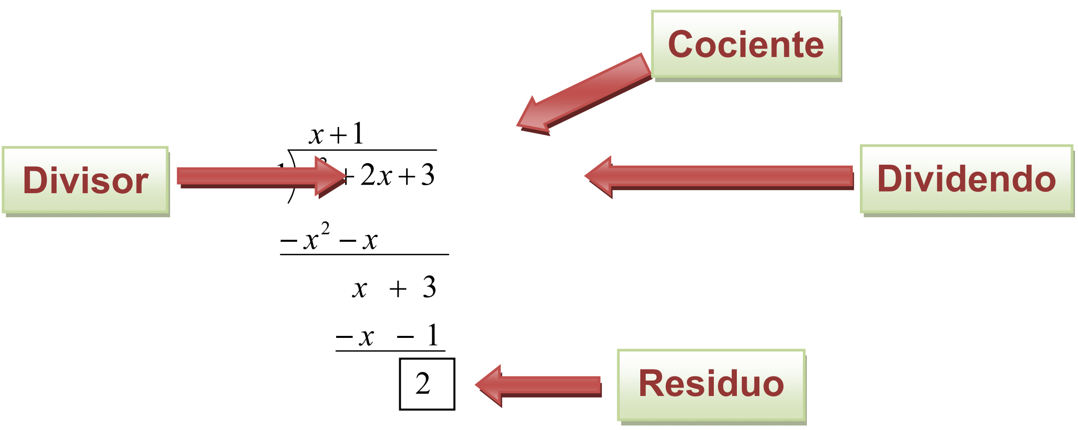
2. 1. Teorema del residuo

"Si un polinomio $f(x)$ se divide entre el binomio $x - a$, donde a es cualquier número real o complejo, entonces el residuo es $f(a)$".

<u>Ejemplo:</u>

Divide f(x) = x^2 + 2x + 3 entre el binomio x + 1

Solución:



El resultado lo puedes escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\overbrace{x^2+2x+3}^{\text{Dividendo}}}{\underbrace{x+1}_{\text{Divisor}}} = \overbrace{(x+1)}^{\text{Cociente}} + \frac{\overbrace{2}^{\text{Residuo}}}{\underbrace{x+1}_{\text{Divisor}}}$$

El teorema del residuo se cumple en la división anterior, en este ejemplo a = –1 , por lo que al evaluarla en la función obtienes lo siguiente:

$$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$$

Existe una forma más abreviada y práctica para realizar la división, es la famosa división sintética, la cual consiste en lo siguiente:

<u>Ejemplo:</u>

Divide $f(x) = -5x + x^2 + 4x^3 + x^4$ entre el binomio x + 2

Solución:

Antes de resolver el ejercicio a través de la división sintética, ordenas en forma decreciente la función, según los exponentes de la variable independiente.

Obtienes así lo siguiente: $f(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 - 5x$, y ahora, sí aplicas la división sintética como sigue:

1. Acomoda los coeficientes → 1 4 1 −5 0 | −2 raíz ←
2. Baja el coeficiente principal → 1

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 4 & 1 & -5 & 0 & -2 \;\text{raíz} \\ & & & & & \\ \hline 1 & & & & & \end{array}$$

Nota: como no hay término independiente se coloca un cero en su lugar.

3. Multiplica el coeficiente principal (1) por la raíz (–2) y colócala bajo el segundo coeficiente:

$$(1)(-2) = -2 \qquad \begin{array}{rrrrr|r} 1 & 4 & 1 & -5 & 0 & -2 \\ & -2 & & & & \\ \hline 1 & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 4 & 1 & -5 & 0 & -2 \\ & -2 & & & & \\ \hline 1 & 2 & & & & \end{array}$$

4. Suma o resta la segunda columna:

5. Multiplica tu resultado por la raíz y ponla bajo el tercer coeficiente:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 4 & 1 & -5 & 0 & -2 \\ & -2 & -4 & & & \\ \hline 1 & 2 & -3 & & & \end{array}$$

6. Continúa así con el resto de los coeficientes:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 4 & 1 & -5 & 0 & -2 \\ & -2 & -4 & 6 & -2 & \\ \hline 1 & 2 & -3 & 1 & \boxed{-2} & \end{array}$$

Residuo

Los resultados de la división sintética corresponden a los coeficientes del cociente que resultó de la división.

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 4 & 1 & -5 & 0 & -2 \\ & -2 & -4 & 6 & -2 & \\ \hline \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{1} & \boxed{-2} & \text{Residuo} \\ x^3 & x^2 & x & \text{Término constante} & & \end{array}$$

Grado de las variables:

El resultado que obtuviste lo expresas de la siguiente manera:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + x^2 - 5x}{x+2} = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 - \frac{2}{x+2}$$

Comprueba tú mismo que el teorema del residuo se cumple en esta función polinomial.

<u>Práctica 17</u>

I.- Usando la división normal o división sintética realiza las siguientes divisiones entre polinomios y al final verifica que se cumpla lo establecido por el teorema del residuo.

Dividendo	Divisor
1) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 15/4$	$4x - 5$
2) $f(x) = 6x^3 + 10x^2 + x + 8$	$2x^2 + 1$

3) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 1$	$x^2 + 2x - 3$
4) $f(x) = x^5 + 3$	$x^3 - 1$
5) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 1$	$x - 2$
6) $f(x) = 4x^2 - 52x + 169$	$2x - 13$
7) $f(x) = 6x^4 - x^3 - 37x^2 + 21x - 40$	$2x - 5$
8) $f(x) = x^6 - 64$	$x^3 - 8$
9) $f(x) = -14x^2 + 71x + 33$	$-7x - 3$
10) $f(x) = x^2 + 2x - 35$	$x + 7$

2.2. Teorema del factor

"Cuando un polinomio $f(x)$ se divide entre un binomio $x - c$ y su residuo es cero, entonces podemos afirmar que c es raíz del polinomio, es decir, el residuo r =f(c)=0".

Ejemplo:

Demuestra que los binomios $(x - 1)$ y $(x + 3)$ son factores del polinomio $f(x) = 2x^4 + x^3 - 14x^2 + 5x + 6$.

Solución:

Las raíces a probar son: $x = 1$ y $x = -3$, utiliza la división sintética para demostrar lo anterior.

Con $x = 1$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & -14 & 5 & 6 & 1 \\ & 2 & 3 & -11 & -6 & \\ \hline 2 & 3 & -11 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

Residuo

Con $x = -3$

$$\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & -14 & 5 & 6 & -3 \\ & -6 & 15 & -3 & -6 & \\ \hline 2 & -5 & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

Residuo

Como en ambos casos el residuo es cero, ambas son raíces de la función f(x).
De los dos teoremas anteriores puedes concluir lo siguiente:

a) El residuo *r* es el valor de *f* en el punto *a*. Es decir, *r* = f(a).
b) Si r = 0, entonces *x – a* es un factor.

c) Si r = 0, *a* es un cero de la función f(x), es decir, (a, 0) es una intersección de la gráfica de f(x).

2.2.1. Raíces (ceros) racionales de funciones polinomiales

No todas las funciones polinomiales tienen raíces reales, existen varios métodos que pueden mostrarte el tipo de raíces que posee una función polinomial.

Uno de ellos es la llamada ***prueba del cero racional***, la cual relaciona todas las raíces racionales posibles de un polinomio involucrando el coeficiente principal y el término independiente.

Dada una función polinomial de la forma: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, con los coeficientes enteros de la función, entonces, todos los ceros racionales de la función tienen la siguiente forma:

$$\text{Raíces racionales} = \frac{p}{q} = \frac{\textit{factores del término independiente}}{\textit{factores del coeficiente principal}}$$

p y *q* no tienen factores comunes distintos de 1 y *p*

<u>Ejemplo:</u>

Encuentra las raíces de la función $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + 7x + 4$

Para aplicar esta prueba, primero haces una lista con todos los factores del término independiente: $p = \{1, 2, 4\}$

Luego, haces una lista con los factores del coeficiente principal: $q = \{1, 3\}$

Ahora, las posibles raíces racionales son: $\frac{p}{q} = \pm\left\{1, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, 4, \frac{4}{3}\right\}$

Ya que obtuviste las posibles raíces de la función polinomial, tienes que averiguar cuáles de ellas sí lo son. Lo anterior, lo puedes resolver de distintas formas.

- Una forma es evaluando cada posible raíz en la función inicial y la que satisfaga la igualdad esa es raíz.

  Si usas esta opción te resulta lo siguiente:

	$3x^3 - 14x^2 + 7x + 4 = 0$	$x = 1$
Sustituye	$3(1)^3 - 14(1)^2 + 7(1) + 4 = 0$	
Desarrolla	$3 - 14 + 7 + 4 = 0$	

Simplifica $\qquad 0 = 0$

Por lo tanto, $x_1 = 1$ es una raíz de la función.
Lo mismo tendrías que hacer para cada una de las posibles raíces y conocer las que hacen cero la función. Esto te tomaría muchísimo tiempo.

En cambio, la división sintética es de gran utilidad y practicidad.

De la función polinomial $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + 7x + 4$ acomodas los coeficientes y tomas una de las posibles raíces $\frac{p}{q} = \pm\left\{1, \frac{1}{3}, 2, \frac{2}{3}, 4, \frac{4}{3}\right\}$

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -14 & 7 & 4 & 1 \\ & 3 & -11 & -4 & \\ \hline 3 & -11 & -4 & 0 & \end{array}$$

Como el residuo es cero, el 1 se considera raíz de la función f(x), por lo que se puede expresar de la forma siguiente:

$$f(x) = (x - 1)\,(3x^2 - 11x - 4)$$

Es posible obtener el resto de las raíces factorizando la función cuadrática, resultándote lo siguiente:

$$f(x) = (x - 1)\,(3x + 1)(x - 4)$$

Igualas a cero cada factor y despejas "x":
raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = -1/3$ y $x_3 = 4$

Seguramente has advertido en la serie de ejercicios que has resuelto hasta el momento que el número de raíces de una función es siempre igual a su grado. De tal observación surge el teorema siguiente.

Práctica 18

Encuentra los factores de las siguientes funciones polinomiales:

1) $f(x) = x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 16x - 4$

2) $f(x) = 2x^5 + 11x^4 - 2x^3 - 65x^2 - 18x + 72$, entre $x + 4$

3) $f(p) = p^4 - 160p - 2p^3 - 12$ entre $p - 6$

4) $f(n) = 3n^4 - 8n^3 + 9n + 5$ entre $n - 2$

5) $f(b) = b^4 - 3b^3 + 3b - 1$ entre $b - 2$

6) $f(x) = 4x^4 + x^3 + 6x^2 – x + 13$ entre $x – 9$

7) $f(x) = – 3x^4 – x^2 – 13x$ entre $3x + 6$

8) $f(x) = 4x^4 – 8x$ entre $2x + 7$

9) $f(x) = – 8x^4 – 5x^2 + 7x – 10$ entre $–x$

10) $f(x) = x^3 + 3x^2 – 40x$

2.3. Teorema fundamental del álgebra

Si te pidiera que obtengas las raíces de la ecuación $x^2 – x + 1 = 0$, ¿qué te resulta?

No es posible factorizarla… entonces, recurres a la fórmula general y obtienes:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

¿Y ahora…? ¿Qué hacer con una raíz negativa? ¿Existe acaso algún número que multiplicado por sí mismo te resulte –3? ¿Cómo obtener las mencionadas raíces de la ecuación?

Una raíz negativa forma parte del conjunto de los números complejos, aquellos que no son reales.

La unidad de los números complejos es un ***número imaginario***, el cual se expresa con la letra “***i***”, cuyo valor número corresponde a $i = \sqrt{-1}$ y por consecuencia, $i^2 = –1$

Según esta información puedes ahora encontrar las raíces del ejercicio anterior, por lo que lo resuelves de la siguiente manera:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}} \qquad x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}}$$

En este ejemplo puedes observar que un número complejo es una combinación de un número real y una parte con la unidad imaginaria. Entonces, ya advertiste que cuando un polinomio no posee raíces reales, las tiene complejas. A través de este trabajo surge el gran teorema fundamental del algebra que enuncia lo siguiente:

El **teorema fundamental del álgebra** establece que si f(x) es un polinomio de grado *n*, con n> 0, entonces la función f(x) tiene al menos un cero (raíz) en el sistema de números complejos.

De este teorema se deriva que un sistema de números complejos, una función polinomial de grado *n*, tiene exactamente n-ceros.

Ejemplo:

a) La función polinomial de primer grado $f(x) = x + 5$ tiene exactamente una raíz en $x = -5$

b) La función polinomial cuadrática $f(x) = x^2 - 5x + 6$ tiene exactamente dos raíces en $x = 3$ y $x = 2$, y puede escribirse de la forma: $f(x) = (x - 3)(x - 2)$.

c) La función polinomial cúbica $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ tiene exactamente 3 raíces en $x = 1$, $x = i$, $x = -i$ y puede escribirse de la forma: $f(x) = (x - 1)(x - i)(x + i)$.

d) La función polinomial de grado cuatro $f(x) = x^4 - 16$, tiene exactamente cuatro raíces en $x = 2$, $x = -2$, $x = 2i$, $x = -2i$, y puede escribirse de la forma:
$$f(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$$

Una vez realizado el análisis anterior adviertes que conociendo las raíces o ceros de una función polinomial encuentras sus factores y descubres que puedes expresarla como una multiplicación de dichos factores, por lo que se deriva el siguiente teorema:

Práctica 19

I.- Encuentra todas las raíces complejas de cada función polinomial.

1) $f(x) = x^2 + 81$

2) $f(x) = x^2 + 2x + 4$

3) $f(x) = 9x^2 + 12x + 6$

4) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x - 30$

5) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 1$

6) $f(x) = x^4 - 16$

7) $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$

8) $f(x) = 18x^3 - 27x^2 - 2x + 3$

9) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 16x + 64$

10) $f(x) = x^2 - 4x + 8$

2.4. Teorema de la factorización lineal

Si f(x) es un polinomio de grado *n*, con $n > 0$, entonces f(x) tiene precisamente *n* factores lineales, es decir:

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2)....(x - c_n),$$

en donde $c_1, c_2, ...c_n$ son números complejos y *a* es el coeficiente principal de f(x).

Ejemplo:

Expresa la siguiente función en su forma factorizada $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 2x - 1$

Solución:
Para x = 1,

$$\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Te resulta: $f(x) = (x - 1)(x^5 - x^4 - x + 1)$, por lo que continuas buscando más raíces para factorizar:

Para x = – 1,

$$\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ & -1 & 2 & -2 & 2 & -1 & \\ \hline 1 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 & \end{array}$$

Te resulta: $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1)$, factorizas ahora el polinomio de grado cuatro:

Para x = 1,

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ & 1 & -1 & 1 & -1 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & \end{array}$$

Te resulta: $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$, factorizas ahora el polinomio de grado tres:

Para x = 1

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

Te resulta: $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 1)(x - 1)(x^2 + 1)$, factorizas ahora el polinomio de grado dos:

Igualas a cero el factor:	$x^2 + 1 = 0$
Despejas la variable "x"	$x^2 = -1$
Aplicas la raíz cuadrada:	$x = \pm i$

Por lo que, la función polinomial de grado seis se puede expresar en función de la multiplicación de sus factores como sigue:

$$f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 1)(x - 1)(x + i)(x - i)$$

Además, aplicas la ley de exponentes a los factores repetidos y obtienes lo siguiente:

$$f(x) = (x - 1)^3(x + 1)(x + i)(x - i)$$

Práctica 20

I.- Encuentra las raíces de cada función polinomial y exprésala en forma factorizada.

1) $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

3) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

4) $f(x) = 3x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x - 1$

5) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

6) $f(x) = 4x^5 + 12x^4 - x - 3$

7) $f(x) = 6x^3 – 5x^2 – 7x + 4$

8) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x$

9) $f(x) = x^4 – 2x^3 + 10x^2 – 8x + 4$

10) $f(x) = 3x^3 – 8x^2 – 13x + 30$

Semana 3

Sesión 9

Los temas a revisar el día de hoy son:

3. Funciones Racionales
3.1. Definición de una función racional
3.2. Dominio y Rango de una función racional
3.4. Gráfica de las funciones racionales

3. Funciones Racionales

Después de haber trabajado ampliamente con el tipo de funciones polinomiales, y que adquiriste un dominio sobre la obtención de raíces y gráficas de las mismas, te pregunto, ¿qué ocurrirá con las raíces y gráficas de una función definida como la razón de dos funciones polinomiales?

3.1. Definición de una función racional

Una **función racional** es aquella que se obtiene al dividir un polinomio entre otro polinomio de mayor o menor grado que el primero siempre y cuando ambos polinomios tengan la misma variable.

Algebraicamente se expresa de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}; \ Q(x) \neq 0$$

Ejemplo:

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$, dicha función expresada en forma racional se puede simplificar y expresarse en forma polinomial, esto es posible cuando factorizas el polinomio cuadrático.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)} = x - 2 \qquad\qquad f(x) = x + 2$$

Una función racional no existe cuando su denominador se hace cero. Así por ejemplo, la función:

$f(x) = \dfrac{8x + 2}{5x - 3}$, cuando 5x – 3 = 0 la función no existe, es decir, cuando x = 3/5.

Práctica 21

I.- Simplifica las siguientes funciones racionales y encuentra los valores para los cuales la función no existe.

Función original	Función simplificada	Valores para los cuales la función no existe
a) $f(x)=\dfrac{x^2+8x+16}{x+4}$		
b) $f(y)=\dfrac{y}{y+3}$		
c) $f(s)=\dfrac{4s}{s^2-36}$		
d) $f(x)=\dfrac{4x+7}{6x}$		
e) $f(n)=\dfrac{n^2+5n+6}{n^2-9}$		

3.2. Dominio y Rango de una función racional

El dominio de una función racional está formado por todo el conjunto de los números reales, excepto aquellos valores de *x* que hacen cero el denominador de la función racional.

El rango de una función racional es un subconjunto de los números reales.

Una forma rápida y práctica para obtener el rango de una función racional $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se trata de despejar "x" en términos de "y" encontrando los valores de "y" para los cuales "x" no es un número real.

Ejemplo:

Determina el dominio y rango de la función racional $f(x)=\dfrac{4}{x^2-9}$

Solución:

Para determinar el dominio de la función racional f(x), es necesario que encuentres los valores para los cuales el denominador de la función es cero.

Es decir, cuando $x^2-9=0$, factorizas y obtienes que esto ocurre cuando $x=\pm 3$

Por lo que el dominio de la función racional f(x) es $D=\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 3 \wedge x \neq -3\}$, este conjunto se puede representar también mediante intervalos de la siguiente manera:

$$D=(-\infty,-3)\cup(-3,3)\cup(3,\infty)$$

Para determinar el <u>rango de la función racional f(x)</u>, es necesario que despejes la variable “y” en términos de “x”, por lo que obtienes lo siguiente:

De la ecuación inicial:	$y = \dfrac{4}{x^2 - 9}$
Multiplica todo por (x^2 – 9):	$(x^2 - 9)y = 4$
Transpones “y”:	$x^2 - 9 = \dfrac{4}{y}$
Suma 9 unidades:	$x^2 = \dfrac{4}{y} + 9$
Y… ¡listo!	$x = \sqrt{\dfrac{4}{y} + 9}$

Ya que obtuviste la ecuación en términos de "y", ahora encuentra los valores de “y” para los cuales “x” es real.

Primero, dentro del radical se encuentra una expresión racional, por lo que adviertes que debe ser distinta de cero, es decir, y ≠ 0.

También, una raíz es real cuando su radiando es positivo, es decir, mayor o igual a cero, entonces, determina ahora los valores que puede tomar “y”.

	Caso y > 0	**Caso y < 0**
Multiplica todo por “y”:	$\dfrac{4}{y} + 9 > 0$	$\dfrac{4}{y} + 9 < 0$
Resta 4 unidades:		$4 + 9y < 0$
Divide todo entre 9 unidades:		$9y < -4$
Y ¡listo!		$y < \dfrac{-4}{9}$

De los resultados que obtuviste y ≠ 0, y > 0 y y < - 4/9 concluyes que el rango de la función racional es:

$$R = \{y \in \mathbb{R} / \ y > 0 \wedge y < -4/9\}$$
$$R = (-\infty, -4/9) \cup (0, \infty)$$

Práctica 22

I.- Obtén el dominio y rango de cada una de las siguientes funciones racionales.

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

3) $f(x)=\dfrac{1-5x}{1-2x}$

4) $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$

5) $f(x)=\dfrac{7}{5x+9}$

6) $f(x)=\dfrac{4x+9}{x^2+7x-8}$

7) $f(x)=\dfrac{5x+9}{x^2-121}$

8) $f(x)=\dfrac{4}{x^2+100}$

9) $f(x)=\dfrac{3x-5}{2x-9}$

10) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

3.3. Gráfica de las funciones racionales

La gráfica de las funciones racionales siempre presenta discontinuidad debido a los valores para los cuales el denominador de la función racional es cero.

Observa detenidamente el comportamiento que presentan dichas funciones en el plano cartesiano, y advierte las características que en su conjunto presentan.

Ejemplo:

Grafica la función racional $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+1}$.

Solución:

Para trazar la gráfica de la función racional f(x), primero determinas los valores que la variable “x” no puede tomar,

$2x + 1 = 0 \qquad\qquad x = -\tfrac{1}{2}$

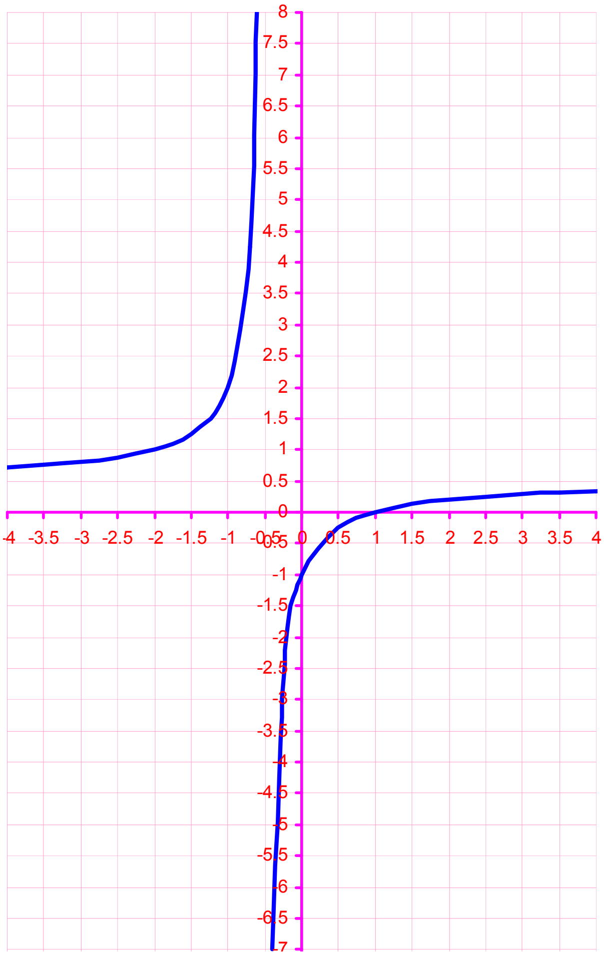
A partir de este valor que no puede tomar la variable “x”, elaboras una tabla con los valores próximos a la derecha y a la izquierda del mismo.

x	f(x)
-4.5	0.69
-4	0.71
-3.5	0.75
-3	0.8
-2.5	0.88
-2	1
-1.5	1.25
-1	2
-0.7	4.25
-0.6	8
-0.5	indeterminado
-0.4	-7
-0.2	-2
0	-1
0.5	-0.25
1	0
1.5	0.13
2	0.2
2.5	0.25
3	0.29
3.5	0.31
4	0.33

El d[...] [x
ε ℝ/

Com[...]

funci[...] la



Estos[...] “x”
indet[...]sa
recta[...]ue
éstas[...]ias
recta[...]no
línea

Prác

I.- T[...]tes
funci

1) $f(x) = \dfrac{4}{x+8}$

2) $f(x) = \dfrac{10}{x}$

3) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-5}$

4) $f(x)=\dfrac{4x+1}{x^2-1}$

5) $f(x)=\dfrac{x^2+6x+9}{x-6}$

6) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-1}$

7) $f(x)=\dfrac{x-10}{3x+7}$

8) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-9}$

9) $f(x)=\dfrac{5x-2}{x+1}$

10) $f(x)=\dfrac{12}{x-1}$

Sesión 10

Los temas a revisar el día de hoy son:

3.6. Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de una función racional

3.6. Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de una función racional
Las asíntotas se clasifican en tres tipos: horizontales, verticales y oblicuas.

Asíntotas verticales
La línea x = a se denomina asíntota vertical de la gráfica de la función f(x),
si f(x) → ∞ o f(x) → - ∞ a medida que x → a, ya sea por la derecha o por la izquierda.

Si f(x) es una función racional del tipo:

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con P(x) y Q(x) sin factores comunes y Q(x) ≠ 0

Entonces, la gráfica de f(x) tiene asíntotas verticales en los ceros de Q(x), es decir, en los valores de *x* que solucionan la ecuación Q(x) = 0.

__**Ejemplo:**__

Traza la gráfica de la función racional $f(x) = \frac{1}{x-5}$ y marca su asíntota.

Solución:

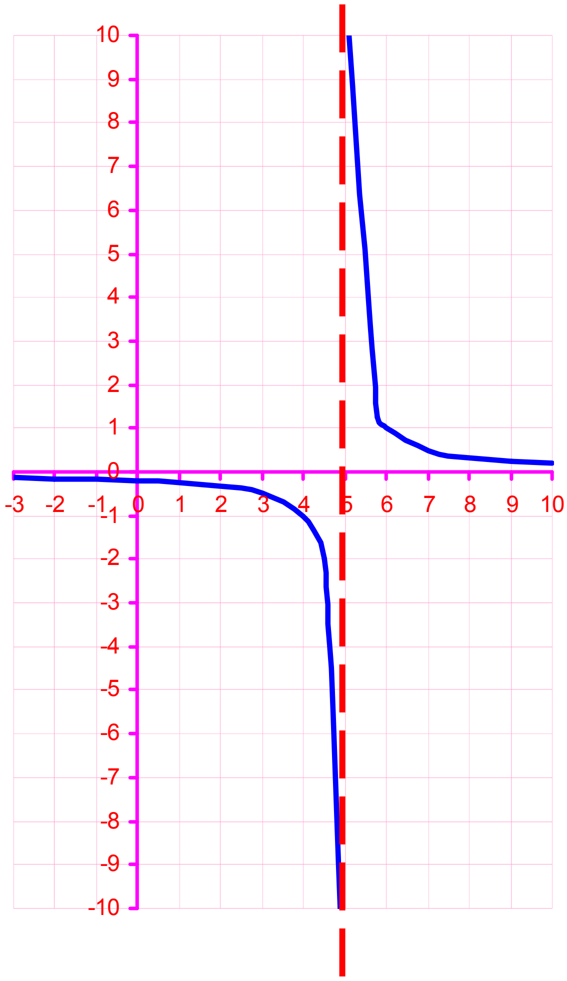
Para trazar la gráfica, primero encuentra el valor de "x" que indetermina la función, esto es, cuando el denominador es cero.

Por lo que igualas a cero el denominador: x – 5 = 0, entonces cuando x = 5.

De tal manera que la asíntota vertical de la función corresponde a la recta x = 5.

Ya que conoces la asíntota, elabora la tabla con valores próximos a dicha asíntota para advertir su comportamiento gráfico en el plano cartesiano.

x	f(x)
-3	-0.13
-2	-0.14
-1	-0.17
0	-0.20
1	-0.25
2	-0.33
3	-0.50
4	-1.00
4.5	-2.00
4.9	-10.00
5	indeterminado
5.1	10.00
5.8	1.25
6	1.00
7	0.50
8	0.33
9	0.25
10	0.20



Asíntotas horizontales

La línea y = b se denomina asíntota horizontal de la gráfica de la función f(x), si f(x) → b, a medida que x → ∞ o x → -∞.

Si f(x) es una función racional del tipo:

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+....+b_2x^2+b_1x+b_0}$$

con P(x) y Q(x) sin factores comunes y Q(x) ≠ 0

Entonces, la gráfica de f(x) tiene asíntotas horizontales (o ninguna) y puedes determinarla como sigue:

a) Si n < m, la gráfica de f(x) tiende al eje x (y = 0) como una asíntota horizontal.

b) Si n = m, entonces la gráfica de f(x) tiene la línea $y=\frac{a_n}{b_m}$ como una asíntota horizontal.

c) Si n> m, entonces la gráfica de f(x) no tiene asíntotas horizontales.

Ejemplo:

Traza la gráfica de la función racional $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ y marca sus asíntotas.

Solución:

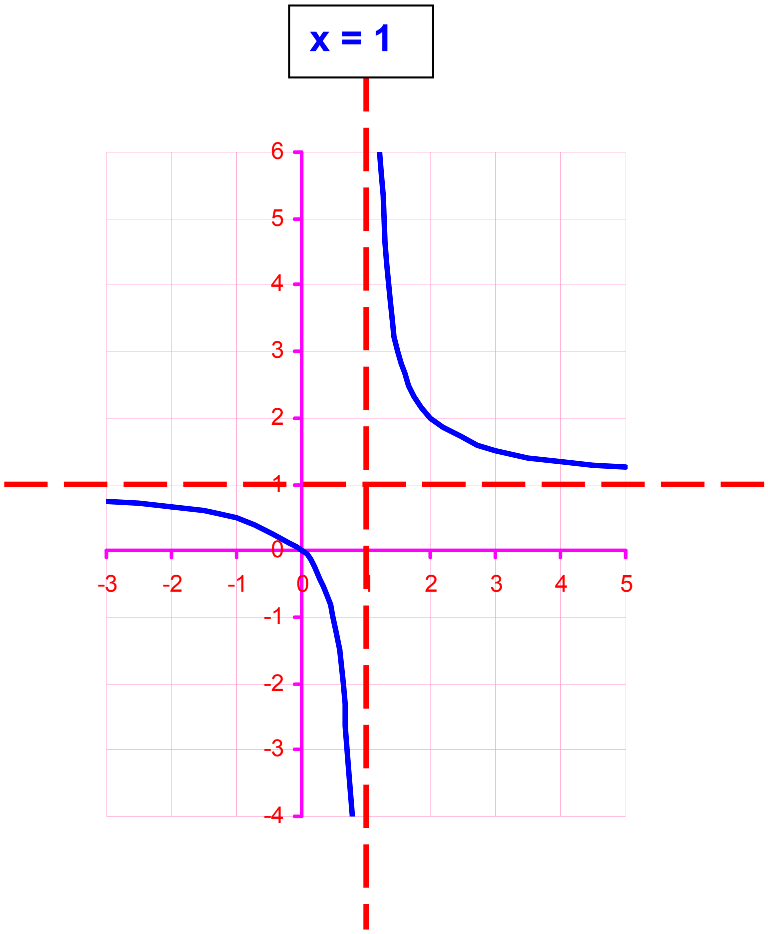
Para trazar la gráfica, primero determina el valor de "x" que indetermina la función, esto es, cuando el denominador es cero, x – 1= 0, entonces cuando x = 1.

Entonces, la asíntota vertical de la función corresponde a la recta x = 1.

Para determinar la asíntota horizontal, verifica los exponentes de la variable en el numerador y en el denominador de la función, en este caso, como son iguales, corresponde lo indicado en el inciso b), lo cual indica que la asíntota corresponde a:

$$y=\frac{a_n}{b_m}=\frac{1}{1}=1$$

x	f(x)
-3	0.75
-2	0.67
-1	0.50
0	0.00
0.2	-0.25
0.4	-0.67
0.6	-1.50
0.8	-4.00
1	indeterminado
1.2	6.00
1.4	3.50
1.6	2.67
2	2.00
3	1.50
4	1.33
5	1.25



Asíntotas oblicuas

Para el caso particular en que el grado de P(x) es exactamente uno más que el grado de Q(x), es decir, n = m + 1, se dice que la función racional f(x) tiene una asíntota oblicua.

Este tipo de asíntotas son líneas rectas definidas por una ecuación lineal del tipo y = mx + b; para obtener dicha ecuación sólo tienes que realizar la operación de división normal y el resultado obtenido es una ecuación del tipo mencionado: y = mx + b.

Ejemplo:

Traza la gráfica de la función racional: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$ y obtén sus asíntotas.

Solución:

Como podrás advertir el polinomio del numerador es de mayor grado que el del denominador, por lo que esta función posee al menos una asíntota oblicua y procedes a resolverlo como anteriormente se te indicó.

Realizas la división normal:

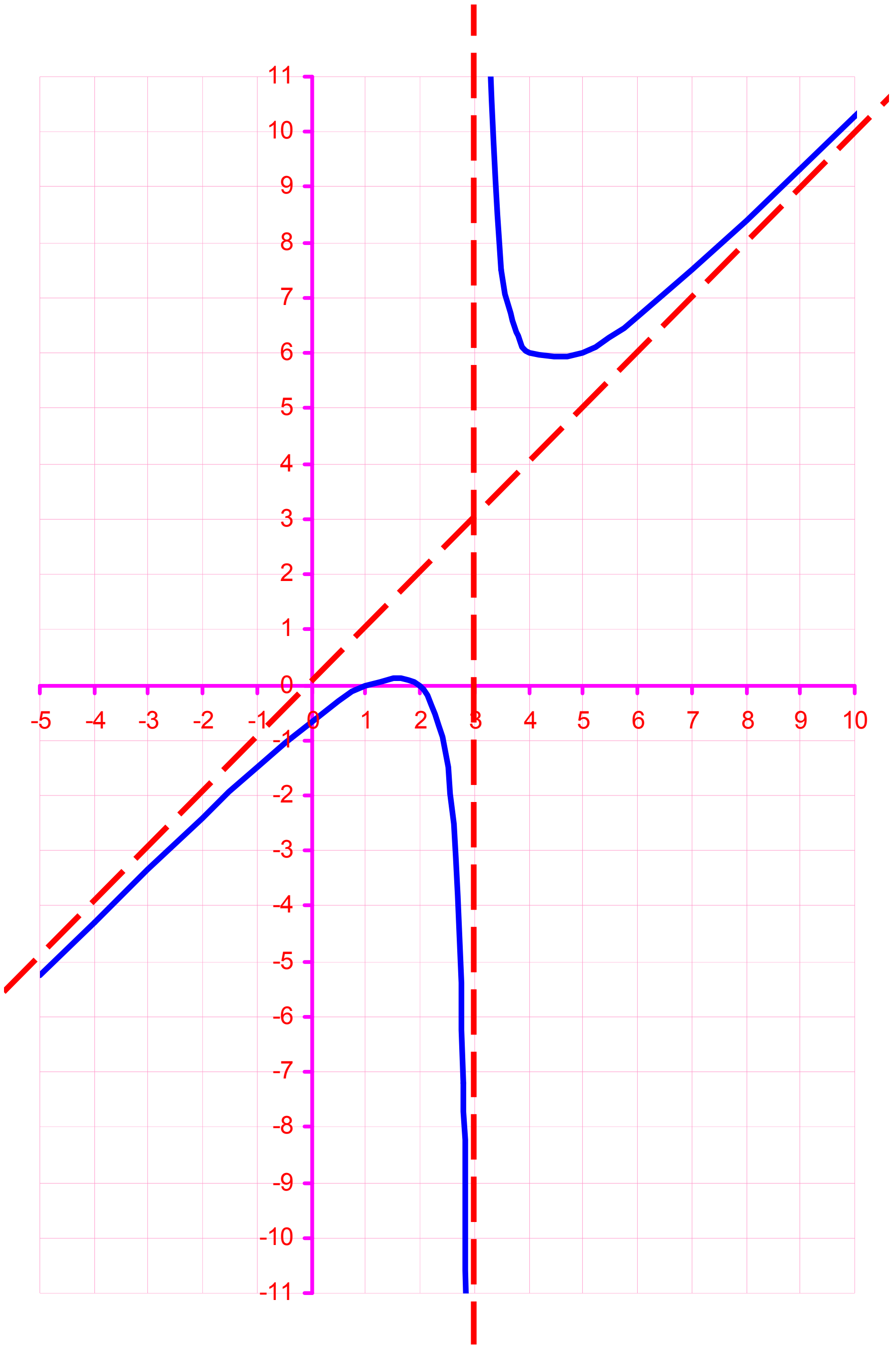
$$\begin{array}{r|l} & \quad\; x \\ x-3 & x^2 - 3x + 2 \\ & \underline{-x^2 + 3x} \\ & \qquad\quad +2 \end{array}$$

Por lo que el resultado obtenido, es decir, el cociente “x” es una recta asíntota oblicua de la función racional.

La otra asíntota es una asíntota vertical, es decir, cuando x – 3 = 0, o sea, x = 3.

Su tabla y gráfica correspondientes son las siguientes:

x	f(x)
-5	-5.25
-4	-4.29
-3	-3.33
-2	-2.40
-1	-1.50
0	-0.67
1	0.00
2	0.00
2.5	-1.50
2.8	-7.20
2.9	-17.10
3	indeterminado
3.1	23.10
3.2	13.20
3.5	7.50
3.8	6.30
4	6.00
5	6.00
6	6.67
7	7.50
8	8.40
9	9.33
10	10.29
11	11.25



Práctica 24

I.- Encuentra las asíntotas horizontales y verticales de cada una de las siguientes funciones racionales.

1) $f(x)=\dfrac{5}{6x-7}$

2) $f(x)=\dfrac{4x}{5x^2-3x}$

3) $f(x)=\dfrac{4x+2}{x-7}$

4) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-8}{x^2+6x}$

5) $f(x)=\dfrac{3x-12}{7x-4}$

II.- Encuentra las asíntotas oblicuas de cada una de las siguientes funciones racionales.

6) $f(x)=\dfrac{x^2+8}{x-5}$

7) $f(x)=\dfrac{5x^2+8x-17}{x+1}$

8) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{x+1}$

9) $f(x)=\dfrac{9x^2-14x+5}{x^2+4x-5}$

10) $f(x)=\dfrac{5x^3+3x^2-6x+8}{x^2+8x+6}$

Sesión 11

Los temas a revisar el día de hoy son:

4. Funciones Exponenciales y Logarítmicas

4.1. Función Exponencial

4.1.1. Gráfica de una función exponencial

4.1.2. Dominio y Rango de una función exponencial

4. Funciones Exponenciales y Logarítmicas

Hasta el momento has trabajado una clase de funciones, las llamadas funciones algebraicas, en el tema actual analizarás las funciones exponenciales y logarítmicas, las cuales son consideradas dentro del tipo de funciones trascendentes.

4.1. Función Exponencial

Una **función exponencial** es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde $a > 0$, $a \neq 1$, y *x* es cualquier número real.

De tal manera que la función $f(x) = a^x$ es una función exponencial con base *a.*

Las leyes de los exponentes son aplicables en esta clase de funciones:

Producto de la misma base	$a^n \times a^m = a^{n+m}$	$y^4y^3 = y^{4+3} = y^7$
Potencia de una potencia	$(a^n)^m = a^{n \times m}$	$(y^3)^4 = y^{3x4} = y^{12}$
Potencia de un producto	$(ab)^n = a^n b^n$	$(5xy)^3 = 5^3x^3y^3$
Potencia de un cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2x}{3}\right)^4 = \frac{2^4 x^4}{3^4}$
Cociente de la misma base	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{x^6}{x^4} = x^{6-4} = x^2$
Potencias con exponentes negativos	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\frac{y^3}{y^5} = y^{3-5} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$
Potencia con exponente cero	$a^0 = 1$	$\frac{x^3}{x^3} = x^{3-3} = x^0 = 1$
Potencia de una raíz	$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$	$\sqrt[6]{4x^4} = 2^{\frac{2}{6}} x^{\frac{4}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}$

4.1.1. Gráfica de una función exponencial

La función exponencial más simple es de la forma: $f(x) = b^x$, cuya base es un constante elemento del conjunto de los números reales y "x" la variable de la función.

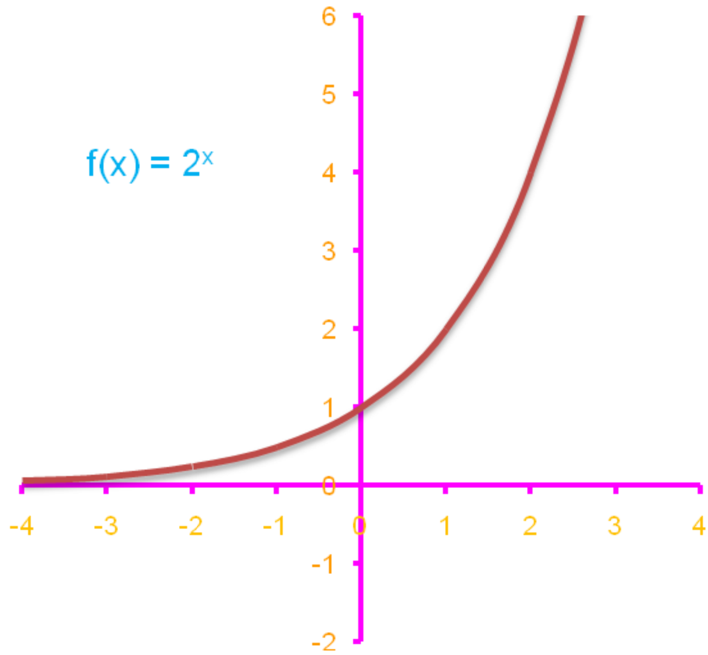
<u>Ejemplo 1:</u>

Traza la gráfica de la función exponencial: $f(x) = 2^x$ y encuentra sus características.

Solución:

Para trazar la gráfica de la función es indispensable que realices una tabulación con los valores de la función, y puedas observar su comportamiento en ambas partes, de tal manera que obtienes lo siguiente:

$f(x) = 2^x$	
"x"	**f(x)**
-6	0,02
-5	0,03
-4	0,06
-3	0,13
-2	0,25
-1	0,5
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64



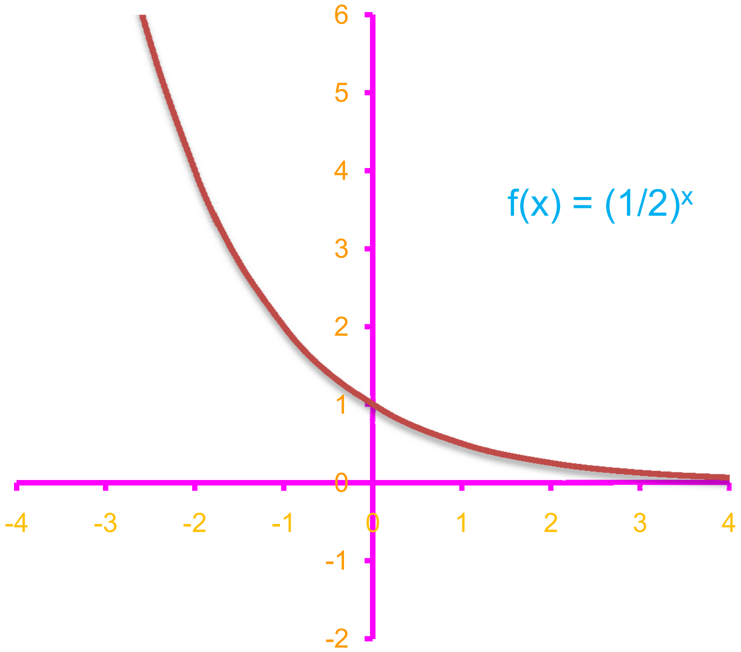
Tanto en la tabla de valores como en la gráfica es posible que logres observar cómo la función es creciente, puesto que conforme aumentan los valores de la variable independiente, la función toma también valores en aumento.

¿Qué ocurrirá si la base de la función exponencial es muy pequeña? ¿Qué comportamiento tendrá su gráfica?

Ejemplo 2:

Traza la gráfica de la función exponencial: f(x) = − y observa su comportamiento en el plano cartesiano.

Solución:
Como en el ejemplo anterior, es importante que elabores una tabla de valores para observar el comportamiento de la función en el plano.



$f(x) = (1/2)^x$	
"x"	f(x)
-6	64
-5	32
-4	16
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0,50
2	0,25
3	0,13
4	0,06
5	0,03
6	0,02

Solo fue un pequeño cambio en el orden de la función, sustituiste 2 por ½ y esto bastó para que la función tuviera un comportamiento completamente diferente del anterior. Esta función decrece porque entre más sean los valores que toma la variable independiente, menor es el valor de la función.

Otras características que pudiste haber observado en la gráfica de las funciones exponenciales son las siguientes:

1) La función es positiva, puesto que para todos los valores de *x* la gráfica está sobre el eje *x*.
2) Para todos los valores de *b*, y = 1 cuando x = 0
3) Si b > 1, la función es creciente. Si *x* crece la función crece y al decrecer la *x*, la función se aproxima aunque nunca llega alcanzar el cero.
4) Si b < 1, la función es decreciente, si *x* crece, la función decrece y se aproxima, aunque nunca llega a alcanzar el valor 0.
5) Si b > 1 ó b< 1, la función no corta el eje *x*.

4.1.2. Dominio y Rango de una función exponencial

El dominio de una función exponencial está formado por todo el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$), debido a que en todos los casos está definida, D = (-∞, ∞).

En el rango de una función exponencial, como la función nunca toca al eje de las "x", el rango de esta función está definido por todos los valores positivos de "y" ($\mathbb{R}^+$), es decir, R = (0, ∞).

Otra propiedad de una función exponencial es que no tiene raíces y que posee una intersección solamente con el eje de las "y", es decir, en y = 1.

Práctica 25

I.- Traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones exponenciales.

11) $f(x) = 2^{-x}$

12) $f(x) = 2^{x+1}$

13) $f(x) = -2^{x}$

14) $f(x) = 2^{x} - 3$

15) $f(x) = 1^{x}$

16) $f(x) = 3^{2-x}$

17) $f(x) = 2^{3x-1}$

18) $f(x) = 4^{1-3x}$

19) $f(x) = 2^{2x-5}$

20) $f(x) = 2^{4x+2}$

Sesión 12

Los temas a revisar el día de hoy son:

4.1.3. Función exponencial natural
4.2. Función Logarítmica
4.2.1. La función logarítmica como inversa de la función exponencial
4.2.2. Logaritmos comunes y naturales
4.2.3. Operaciones con logaritmos
4.2.4. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

4.1.3. Función exponencial natural

La función exponencial natural es una función que utiliza el número *e* como base, dicho valor se obtiene al calcular la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ utilizando valores de *n* localizados entre 1 y el ∞.

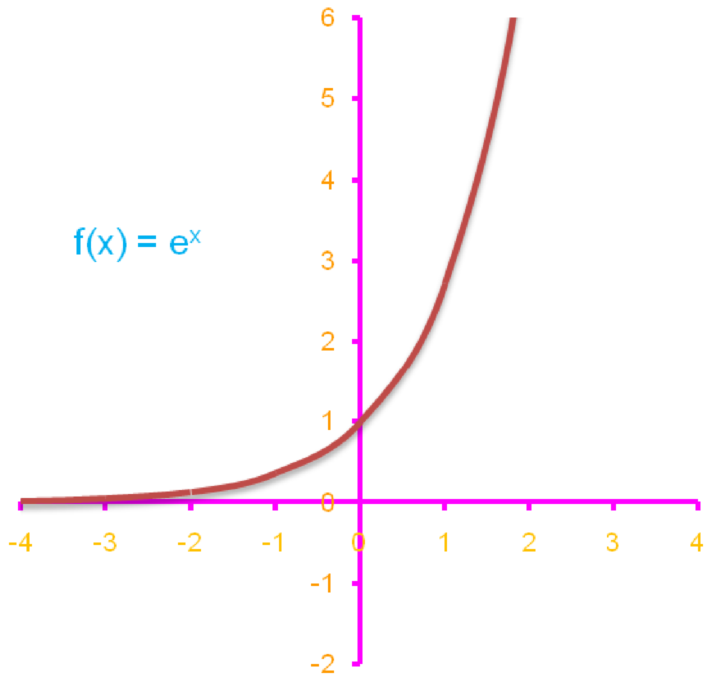
Observa los valores que toma la expresión cuando *n* aumenta:

n	$\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$
1	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = (1+1)^1 = 1$
5	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = (1+\frac{1}{5})^5 = (1+0.2)^5 = (1.2)^5 = 2.48832$
10	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = (1+\frac{1}{10})^{10} = (1+0.1)^{10} = (1.1)^{10} = 2.59374$
500	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = (1+\frac{1}{500})^{500} = (1+0.002)^{500} = (1.002)^{500} = 2.71556$
1000	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = (1+\frac{1}{1000})^{1000} = (1+0.001)^{1000} = (1.001)^{1000} = 2.71692$
10^5	$(1+\frac{1}{100000})^{100000} = (1+0.00001)^{100000} = (1.00001)^{100000} = 2.71826$

Con base en esta tabla puedes apreciar que mientras más crece el valor de *n*, la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se acerca al número irracional 2. 7182818…, el cual se denota con la letra *e*. Este número es un número irracional, por lo que, al igual que el valor de π, sus decimales no siguen un patrón determinado.

La gráfica de la función exponencial natural es la siguiente:

$f(x) = e^x$	
"x"	f(x)
-6	0,0025
-5	0,0067
-4	0,0183
-3	0,0498
-2	0,1353
-1	0,3679
0	1
1	3
2	7
3	20
4	55
5	148
6	403



Crecimiento y decrecimiento exponencial

La expresión de crecimiento exponencial se utiliza mucho, por ejemplo, para hablar del crecimiento de una población, de la reproducción de las bacterias, etc. Dicho fenómeno lo puedes expresar mediante una función exponencial creciente.

Por ejemplo, en el caso del crecimiento exponencial de una población:

P_o = cantidad de población presente en el tiempo t = 0. **Factor de crecimiento o decrecimiento.**
k = es la **tasa de crecimiento** (si su valor es positivo) **o decrecimiento** (si su valor es negativo).
P = población actual
t = tiempo, ya que el crecimiento de la población depende del tiempo.

La expresión anterior representa el crecimiento exponencial.

Ejemplo:

Si sabes que cierto tipo de bacteria aumenta según el modelo:

$$P(t) = 100e^{0.2197t}$$

Donde *t* es el tiempo en horas.

Encuentra: a) P(0) b) P(5)

Solución:

a) El tiempo en P(0) es t = 0 por lo que sustituyes dicho valor en el modelo que representa el incremento de las bacterias.

$$P(0) = 100e^{0.2197(0)}$$
$$P(0) = 100(1)$$
$$P(0) = 100$$

b) El tiempo en P(5) es t = 5 por lo que sustituyes dicho valor en el modelo que representa el incremento de las bacterias.

$$P(5) = 100e^{0.2197(5)}$$
$$P(5) = 100e^{1.0985}$$
$$P(5) = 100(3)$$
$$P(5) = 300$$

Práctica 26

I.- Traza la gráfica de las siguientes funciones exponenciales naturales.

1) $f(x) = e^{2x}$

2) $f(x) = 1 + e^{-x}$

3) $f(x) = -e^{-x}$

4) $f(x) = 2e^{0.24x}$

5) $f(x) = 4 - e^{3x}$

II.- Resuelve los siguientes ejercicios de crecimiento o decrecimiento exponencial.

6) La demanda de un producto está dada por la ecuación $P = 500 - 0.5e^{0.004x}$. Encuentra el precio *P* para una demanda de:

a) x = 1000 unidades
b) x = 1500 unidades

7) La población de una ciudad aumenta según el modelo: $P = 25000e^{0.0293t}$, t = tiempo en años, t = 0 corresponde a 1990. Aproxima la población que hay o habrá en los años:
   a) 2000
   b) 2005
   c) 2010
8) La bacteria del cólera se divide cada media hora para producir dos bacterias nuevas. ¿Cuántas bacterias habrá en cuatro horas si inicialmente se tiene una colonia de 32,420 bacterias, considerando la relación $B(t) = (32420)(2^{2t})$? ¿ Y en 20 días?

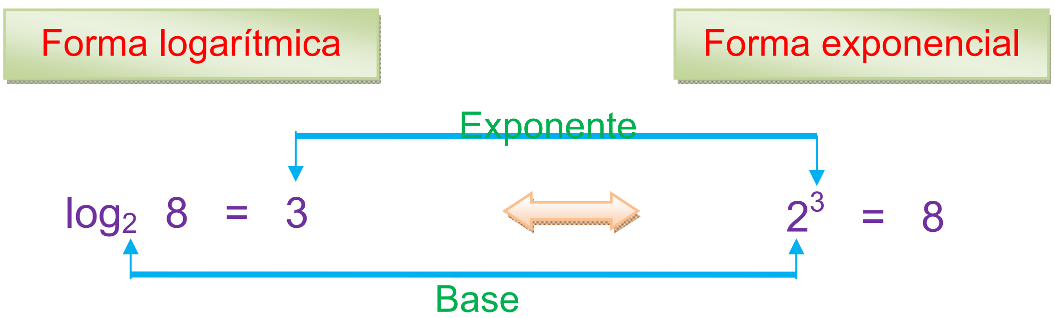
9) Para calcular la presión atmosférica P. en lb/pulg^2, se utiliza la relación $P = 14.7e^{-0.21x}$. Si consideras a "x" como la altura en millas sobre el nivel del mar, qué presión atmosférica habrá en la ciudad de…
   a) Dallas, si su altura es de 133m sobre el nivel del mar.
   b) México, si su altura es de 2235m sobre el nivel del mar.

4.2. Función Logarítmica

El logaritmo base *b* de un número real *x*, mayor que cero, es la inversa de la función exponencial de base *b*. Algebraicamente el logaritmo base *b* se denota como $\log_b(x)$, y dado que esta función y la función exponencial con base "a" son inversas se puede afirmar que:

$$\mathbf{y = \log_b(x) \quad \text{sí y sólo sí} \quad x = b^y}$$

La función se lee como logaritmo de "x" en base *b*.



Cada ecuación logarítmica tiene asociada una ecuación o forma exponencial.

<u>Ejemplo:</u>

Dada la siguiente forma exponencial, escribe su forma logarítmica correspondiente: $4^5 = 1024$

Solución:
Según la forma presentada anteriormente entre una expresión exponencial y una logarítmica, obtienes lo siguiente:

$$\log_4 1024 = 5$$

Práctica 27

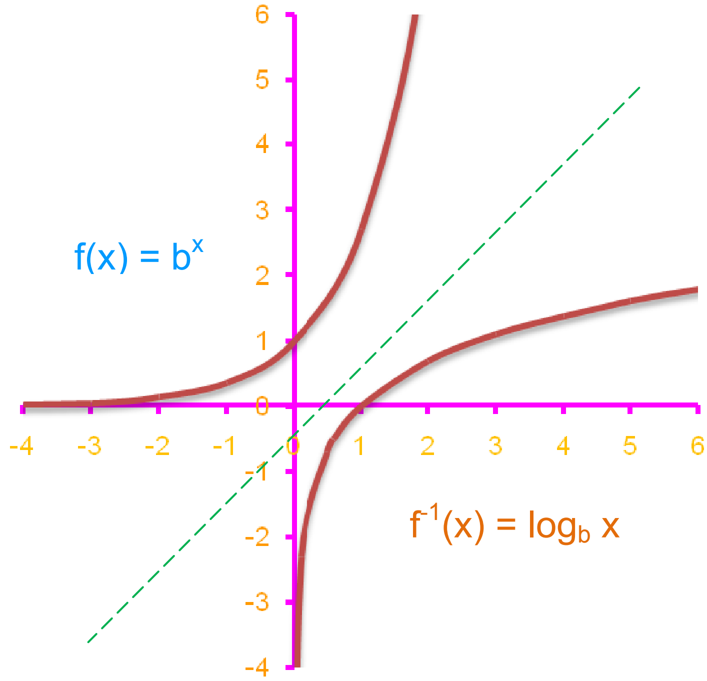
I.- Representa en su forma exponencial o logarítmica, según sea el caso, cada una de las siguientes expresiones:

1) $8^3 = 512$
2) $\log_9 59049 = 5$
3) $y^3 = 8$
4) $\log 10 = 1$

4.2.1. La función logarítmica como inversa de la función exponencial

Al realizar la prueba de la horizontal en la gráfica de la función exponencial -como ésta la intercepta sólo una vez- adviertes que posee una función inversa.

La función logarítmica con base "b" $f^{-1}(x) = \log_b x$ es la función inversa de la función exponencial $f(x) = b^x$, como puedes apreciarlo en el siguiente plano cartesiano:



A través de esta representación gráfica de la función logaritmo -inversa de la función exponencial- puedes apreciar sus características propias y su comportamiento en el plano cartesiano. A continuación, compara ambas gráficas y verifica tus conclusiones con las que se enlistan a continuación.

Propiedades de la función logarítmica

a) Si b< 1, la función es positiva para toda x > 1 y negativa para toda x<1. La función no está definida para valores negativos de *x*.
b) Si b> 1, la función es siempre creciente. Si *x* crece, la *y* crece.
c) Si b< 1, la función es negativa para toda x > 1, y positiva para toda x < 1. La función está definida para valores negativos de x.
d) Si b< 1, la función es siempre decreciente. Si *x* crece, y decrece.
e) Si b> 1 ó b < 1, la gráfica intercepta al eje *x* en (1, 0).

El dominio de la función logarítmica
Se refiere a los números reales positivos, es decir, D = (0, ∞).

El rango de la función logarítmica
Es el conjunto de todos los números reales, es decir, R = (–∞, ∞).

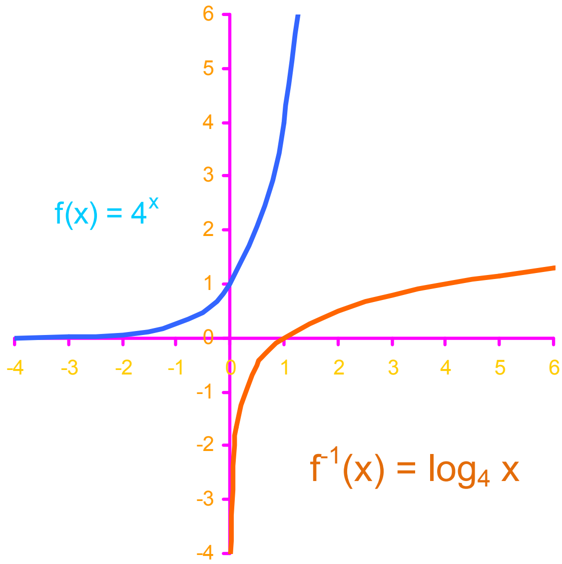
<u>Ejemplo 1</u>:

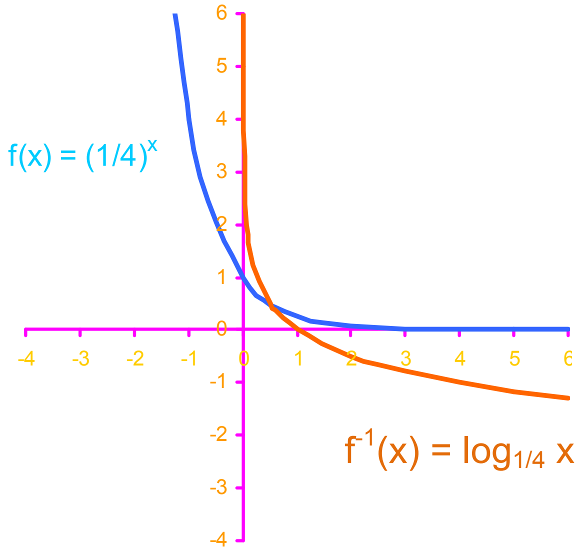
Traza la inversa de la función $f(x) = 4^x$ y de la función $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ usando la definición de logaritmo.

Solución:
Para obtener la función inversa de f(x), aplicas la función logaritmo y obtienes lo siguiente:

De la función inicial	$y = 4^x$,	$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$
Despejas "x" y obtienes:	$x = \log_4 y$	$x = \log_{1/4} x$
Lo expresas como la inversa de la función	$f^{-1}(x) = \log_4 x$	$f^{-1}(x) = \log_{1/4} x$

Una vez que obtuviste la función inversa de f(x), traza su gráfica.





$f(x) = 4^x$	
"x"	f(x)
-2	0.06
-1	0.25
0	1
1	4
2	16

$f(x) = \log_4 x$	
"x"	f(x)
0.6	-0.37
1	0
2	0.5
3	0.79
4	1

$f(x) = (1/4)^x$	
"x"	f(x)
-2	16
-1	4
0	1
1	0.25
2	0.063
3	0.0156

$f(x) = \log_{1/4} x$	
"x"	f(x)
0.0001	6.64
0.001	4.98
1	0
2	-0.5
3	-0.79
4	-1

A través de estos dos ejemplos puedes observar claramente cómo se cumplen las propiedades enunciadas anteriormente sobre la función exponencial y logarítmica.

Práctica 28

I.- Traza la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

a. $y = 2 + \log_{10} x$

b. $y = -\log_{10} x$

c. $y = \log_{10} (x - 1)$

d. $y = \log_{10} (-x)$

II.- Encuentra el valor de “x” sin hacer uso de la calculadora.

e. $\log_8 x = -1/3$

f. $\log_x 8 = 3/2$

g. $\log_8 x^2 = 2$

4.2.5. Logaritmos comunes y naturales

Las bases que son de mayor utilidad en la práctica son la base común, cuando b = 10 y la base natural, cuando b = e (número e).

- La función logarítmica con base 10 se escribe de la forma: $f(X) = \log_{10} x$; se denomina **logaritmo común** y usualmente se escribe como f(x) = log x, sin necesidad de expresar la base 10.

- Asimismo, la función logarítmica con base *e* se escribe de la forma $f(x) = \log_e x$; se denomina **logaritmo natural** y usualmente se escribe como f(x) = ln x.

Propiedades de los logaritmos naturales.

1) ln 1 = 0, puesto que cero es la potencia a la cual debe elevarse el número *e* para obtener 1.
2) ln e= 1, puesto que 1 es la potencia a la cual debe elevarse el número *e* para obtener *e*.
3) $\ln e^x = x$, puesto que *x* es la potencia a la cual debe elevarse el número *e* para obtener e^x.

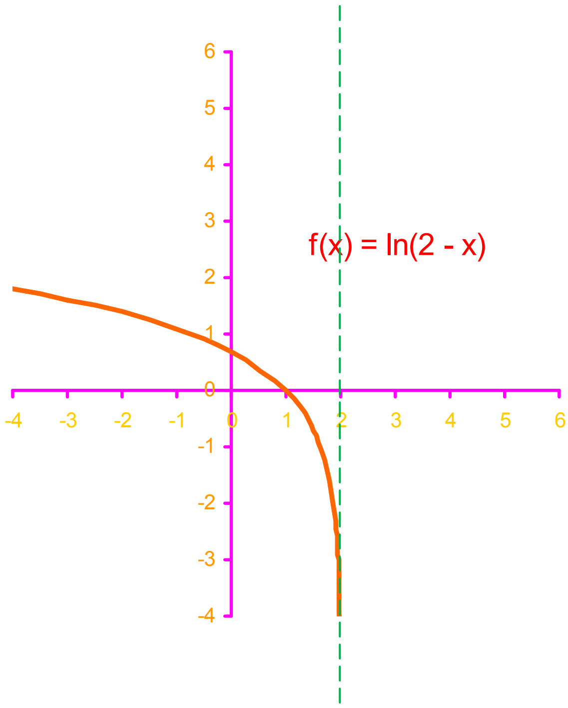
Ejemplo:

Traza la gráfica de la siguiente función f(x) = ln(2 – x)

Solución:

Según las propiedades de logaritmos, 2 – x > 0, por lo que adviertes que el dominio de la función está determinado por x < 2, y concluyes que la recta x = 2 es una asíntota de la misma.

f(x) = ln (2 - x)	
"x"	f(x)
-3	1.61
-2	1.39
-1	1.10
0	0.69
1	0.00
1.4	-0.51
1.6	-0.92
1.8	-1.61
1.9	-2.30
1.94	-2.81
1.99	-4.61
2	indeterminado



4.2.6. Operaciones con logaritmos

Antes de realizar cualquier operación entre funciones logarítmicas es importante que conozcas algunas de sus propiedades con respecto a algunas operaciones fundamentales.

<u>Propiedades de la función Logarítmica</u>

Propiedad	Expresión simbólica
1) El logaritmo de la base es siempre igual a 1.	$\log_a a = 1$
2) El logaritmo de 1 en cualquier base es 0.	$\log_a 1 = 0$
3) El logaritmo de un producto es igual a la suma de logaritmos.	$\log_a (x\ y) = \log_a x + \log_a y$
4) El logaritmo de un cociente es igual a la resta de logaritmos.	$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$
5) El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base (este enunciado engloba al logaritmo de una raíz, entendida como una potencia de exponente fraccionario).	$\log_a (x)^p = p \log_a x$ $\log \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} \log x$

<u>Ejemplo:</u>

Escribe la expresión dada como logaritmo de una sola cantidad. $\frac{1}{3}[2\ln x - \frac{3}{2}\ln(x+1)]$

Solución:

Aplicas las propiedades de los logaritmos para las operaciones fundamentales.

Aplica la propiedad 5) en ambos logaritmos: $\frac{1}{3}[2\ln x - \frac{3}{2}\ln(x+1)]$

Aplica la propiedad 4): $\frac{1}{3}[\ln x^2 - \ln(x+1)^{3/2}]$

Aplica la propiedad 5): $\frac{1}{3}\left[\ln\frac{x^2}{(x+1)^{3/2}}\right]$

Según una de las leyes de exponentes: $\ln\left[\frac{x^2}{(x+1)^{3/2}}\right]^{\frac{1}{3}}$

Simplifica: $\ln\frac{x^{2/3}}{(x+1)^{3/6}}$

¡Listo!

$$\ln\frac{x^{2/3}}{(x+1)^{1/2}} = \ln\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x+1}}$$

4.2.7. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Para resolver cualquier tipo de ecuaciones exponenciales o logarítmicas es importante que consideres las siguientes propiedades:

Si $f(x) = b^x$ y $g(x) = \log_b x$, son funciones con base $b > 1$, entonces:

Propiedades inversas:

1) $\log_b b^x = x$ hay que aplicar composición $(g \circ f)(x)$
   $\ln e^x = x$, si se cambia base *b* por base *e*.

2) $b^{\log_b x} = x$ hay que aplicar $(f \circ g)(x)$
   $e^{\ln x} = x$, si se cambia *a* por *e*.

Propiedades uno a uno:

1) $x = y$, sólo sí $\log_b x = \log_b y$, se dice que *g* es uno a uno

2) $x = y$, sólo sí $b^x = b^y$, se dice que *f* es uno a uno

Ejemplo:

Resuelve las siguientes ecuaciones: a) $3e^{2x} = 4$ b) $2 \ln 5x = 8$

Solución:

a) Para resolver la ecuación exponencial aplicas lo siguiente:

$3e^{2x} = 4$

Divide entre 3 ambos miembros: $e^{2x} = 4/3$

Aplica el logaritmo natural: $\ln (e^{2x}) = \ln (4/3)$

Aplica la propiedad inversa 1): $2x = \ln (4/3)$

Divide entre 2 ambos miembros: $x = ½ \ln(4/3)$

Aplica la función ln: $x \approx 0.144$

¡Listo!

b) Para resolver la ecuación logarítmica aplicas lo siguiente: $2 \ln 5x = 8$

Divide entre 2 ambos miembros: $\ln 5x = 4$

Aplica la función exponencial: $e^{\ln 5x} = e^4$

Simplifica: $5x = e^4$

Divide entre 5: $x = e^4/5$

Realiza la operación: $x \approx 10,920$

¡Listo!

Práctica 29

I.- Resuelve las ecuaciones exponenciales que se dan a continuación.

1) $e^{2x} = 10$

2) $2(1 + e^{2x}) = 5$

3) $200e^{-x} = 100$

4) $3e^{1-x} = 25$

5) $5 - 2e^{x} = 3$

6) $30\ (100 - e^{x/2)} = 500$

7) $4e^{x} = 79$

II.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

8) $\ln x = 3$

9) $\ln\sqrt{x+1} = 2$

10) $\log_2 x - \log_2 (x + 1) = \log_2 (x + 4)$

11) $\log x - \log (2x - 1) = 0$

12) $\ln x + \ln (x + 1) = 1$

13) $\log_4 x - \log_4 (x - 2) = ½$

14) $\log_2 x^2 = 6$

15) $\ln 3x = 1$