UNIDAD I

Números Reales

CONJUNTOS

Definición: *Un **conjunto** es una colección bien definida de objetos. Denotaremos los conjuntos con letras mayúsculas A, B, C, etc. Los objetos que componen el conjunto reciben el nombre de elementos o miembros del conjunto y los denotaremos por letras minúsculas a, b, c, etc.*

Nota: Existen dos formas de escribir un conjunto:

- Por ***extensión*** por la que podemos determinar el conjunto listando todos sus elementos.
- Por ***comprensión*** por la que podemos determinar un conjunto, identificando sus elementos mediante una propiedad común de ellos.

Para escribir un conjunto por extensión, listamos todos sus elementos separados por comas, y finalmente, encerrados entre llaves. Por ejemplo A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,0}.

Para escribir un conjunto por comprensión elegimos un elemento arbitrario ***x*** y señalamos que cumple una determinada propiedad *P(x)*. Finalmente, encerramos toda la expresión entre llaves: A= {*x: P(x)*}, se lee *"A es el conjunto de todos los elementos **x** tales que cumplen la propiedad P(x)"*. (**Nota** **":"** es una manera simbólica de escribir ***tal que"***).

Ejemplos:

1. El conjunto A = {a, e, i, o, u} está expresado por extensión. Si deseamos expresar el conjunto A por comprensión debemos buscar una propiedad ó característica en común que contengan cada uno de sus elementos, en este caso sabemos que los elementos son vocales, por lo tanto el conjunto A se puede expresar por comprensión como sigue:

   A = {*x: x* es una vocal}.
2. Sea B = {*x: x* es un número entero positivo menor que cinco}, este conjunto está expresado por comprensión, para expresar B por extensión debemos determinar el conjunto listando todos sus elementos, es decir B = {1,2,3,4}.

Conjunto Vacío

Dado el conjunto C, C = {*x*: *x* es un profesor de matemática con más de trescientos años de edad} expresado por comprensión, se desea expresar el conjunto por extensión, entonces debemos encontrar todos los elementos del conjunto; es evidente que C carece de elementos, debido a que no existe actualmente un profesor con dicha característica. Por lo tanto, C es un conjunto que carece de elementos, el cual es llamado conjunto vacío. ***El conjunto vacío se denota por { } o Φ***.

Por lo que C = {} ó C =*Φ*.

En cualquier aplicación de la teoría de conjuntos, los elementos de todos los conjuntos pertenecen usualmente a un gran conjunto fijo llamado ***conjunto universal*** *(U).* Por ejemplo si trabajamos en el conjunto de números reales, denotado por $\Re$, el universo son todos los números.

Conjunto Unitario

Un conjunto unitario es aquel que está formado por un solo elemento. ***Por ejemplo***

A= {a}= {x / x=a}

Igualdad de Conjuntos

Decimos que dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos. Para denotar que A y B son iguales, escribimos: **A = B**

Inclusión de conjuntos

Si cada elemento de un conjunto A es también elemento de un conjunto B, entonces se dice que A es un subconjunto de B. Se dice también que **A está contenido en B** o que **B contiene a A**. La relación de subconjunto viene dada por: $A \subset B$

Ejemplo:

Consideremos los siguientes conjuntos A={1,3,4,5,8,9}, B={1,2,3,5,7} y C={1,5}. Podemos observar que todos los elementos del conjunto C están en el conjunto A, por tanto $\mathbf{C \subset A}$. De la misma manera podemos observar que $\mathbf{C \subset B}$. Sin embargo, no todos los elementos del conjunto B están en A, por lo que podemos decir que **B no está incluido en A**.

Propiedades: Sean A y B dos conjuntos cualesquiera se cumple siempre:

1. $\Phi \subset A \subset U$ (el conjunto vacío está contenido en el conjunto A)
2. $A \subset A$ (cualquier conjunto está incluido en sí mismo)
3. *Si* $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$
4. $A=B$ si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$

Operaciones entre Conjuntos

Cuando trabajamos con ecuaciones, problemas, etc. podemos llegar a encontrarnos con distintas situaciones al querer determinar las soluciones de los mismos, es por ello, que a continuación se definirá las operaciones entre conjuntos, las cuales constituyen una herramienta necesaria en la resolución de diferentes ejercicios matemáticos.

Unión de Conjuntos

Ejemplo: Juan, José, Luis, Mario, Alfredo, Rubén, Roberto, Bruno, Adrián, Fernando, Daniel y Andrés estudian en el mismo grupo. De ellos, Juan, Luis, Mario, Rubén y Roberto practican natación. José, Mario, Alfredo, Roberto, Bruno y Andrés juegan fútbol. ¿Cuáles estudiantes practican algún deporte?

Solución:

Llamamos A al conjunto de los estudiantes que nadan, es decir:

A = {Juan, Luis, Mario, Rubén, Roberto} y B al conjunto de los estudiantes que juegan fútbol:

B = {José, Mario, Alfredo, Roberto, Bruno, Andrés}

Ahora formamos la colección de estudiantes que practican algún deporte:

{Juan, Luis, Mario, Rubén, Roberto, José, Alfredo, Bruno, Andrés}.

Los elementos de este conjunto son los estudiantes que practican algún deporte. Notar que a Mario y a Roberto no lo colocamos dos veces en el conjunto, por más que practiquen dos deportes a la vez.

Cuando deseamos, como en el problema anterior reunir los elementos de dos conjuntos A y B, escribimos:

$$C = A \cup B$$

En este caso decimos que C es la *unión de los conjuntos A* y B, y para describir sus elementos:

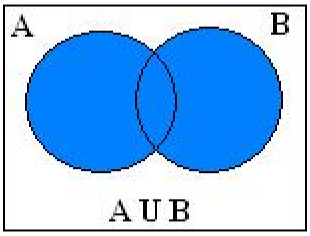
$$A \cup B = \{x / x \in A \ o \ x \in B\}$$

Y se lee A unión B es el conjunto de elementos x tales que x pertenece a alguno de los dos conjuntos, es decir, x pertenece a A *o* x pertenece a B.

Notemos que en la unión se encuentran todos los elementos de A y todos los elementos de B. Es decir:

$$A \subset A \cup B \text{ y } B \subset A \cup B$$

Gráficamente se representa:



Observaciones:

- Si $A \subset B$ entonces $A \cup B = B$.
- Si $A = B$ entonces $A \cup B = A = B$.
- Si $x \in A \cup B$ entonces x pertenece a A, x pertenece a B *o* x pertenece a ambos.

Ejemplo: Si $A = \{3,4,5,6\}$ y $B = \{3,6\}$, encontrar $A \cup B$.

Solución: *Como todos los elementos de B pertenecen al conjunto A (B⊂A) entonces la unión será el conjunto A.*

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$$

Propiedades de la Unión: Sean A y B dos conjuntos cualesquiera se verifica que:

1. Idempotencia: $A \cup A = A$
2. Asociatividad: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. Conmutatividad: $A \cup B = B \cup A$
4. Elemento neutro: $A \cup \Phi = \Phi \cup A = A$

Intersección de Conjuntos

Ejemplo: Los miembros del Consejo de Seguridad de la ONU durante 1997 fueron Japón, Kenia, Polonia, Portugal, República de Corea, Federación Rusa, Suecia, Reino Unido, Estados Unidos de Norteamérica, Chile, China, Costa Rica, Egipto, Francia y Guinea-Bissau. De ellos Federación Rusa, Reino Unido, Estados Unidos de Norteamérica, China y Francia son miembros permanentes. Por otra parte, Portugal, Chile, Costa Rica, Francia y Guinea-Bissau tienen por idioma oficial una lengua romance. ¿Qué países son miembros permanentes y tienen una lengua romance por idioma?

Solución:

Llamamos *A* al conjunto de miembros permanentes del Consejo de Seguridad de la ONU, es decir:

A = {Federación Rusa, Reino Unido, Estados Unidos de Norteamérica, China, Francia} y *B* al conjunto de países cuyo idioma es una lengua romance, o sea:

B = {Portugal, Chile, Costa Rica, Francia, Guinea-Bissau}

Los países que son miembros permanentes y cuyo idioma es una lengua romance son los que están en ambos conjuntos, llamemos *C* a dicho conjunto, entonces:

C = {Francia}

Francia es el único país que es miembro permanente y tiene como idioma una lengua romance.

En general, cuando deseamos obtener los elementos que pertenecen tanto al conjunto *A* como al conjunto *B*, escribimos:

$$C = A \cap B,$$

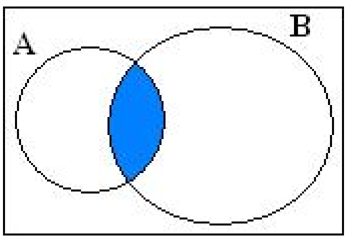
En este caso decimos que *C* es la *intersección de los conjuntos A y B*, o sea:

$$A \cap B = \{X \ / \ x \in A \ y \ x \in B\}$$

Y se lee *A* intersección *B* es el conjunto de elementos *x* tales que *x* pertenece a A y *x* pertenece a B.

De acuerdo con la definición, cualquier elemento de $A \cap B$ es un elemento de *A* y también de *B*, es decir:

$$(A \cap B) \subset A \text{ y } (A \cap B) \subset B.$$



$A \cap B$

Cuando no hay elementos que pertenezcan a ambos conjuntos A y B, decimos que la intersección es vacía o que el conjunto obtenido es el *conjunto vacío*.

Observaciones:

- Si $A \subset B$ entonces $A \cap B = A$.
- Si $A = B$ entonces $A \cap B = A = B$.

Propiedades de la Intersección. Sean A y B dos conjuntos cualesquiera se cumple que:

1. Idempotencia: $A \cap A = A$
2. Asociatividad: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Conmutatividad: $A \cap B = B \cap A$
4. Elemento neutro: $A \cap U = U \cap A = A$

Conjunto de los Números Naturales (N)

Los números que se emplean para contar, 1, 2, 3, 4,… constituyen el conjunto de los Números Naturales (o enteros positivos). Lo simbolizamos con **N** y podemos escribirlo como:

N = {1, 2, 3, 4,….}

Propiedades de N:

1. El conjunto N es infinito
2. Tiene primer elemento (el 1) y no tiene último elemento
3. Todo número natural tiene un sucesor:
   $\forall\ n \in N,\ \exists\ \ n+1 \in N$, donde n + 1 es el sucesor de n
4. Todo número natural tiene un antecesor excepto el 1:
   $\forall\ n \in N \ \wedge\ n \neq 1\ \exists\ \ n-1 \in N$, donde n – 1 es el antecesor de n
5. Entre dos números naturales hay un número finito de números naturales. Se dice que N es discreto

Nota: En este conjunto la suma de dos números naturales da como resultado otro natural (Ley de cierre para la suma), pero no ocurre lo mismo para la diferencia (no vale la ley de cierre), por ejemplo 3 – 5 no tiene solución en este conjunto, por lo tanto ecuaciones del tipo 5 + x = 3 no tienen solución en el conjunto N, de allí la necesidad de introducir un nuevo conjunto de números.

Conjunto de los Números Enteros (Z)

Si al conjunto N se agrega el número 0 y los enteros negativos se obtiene un nuevo conjunto llamado Enteros. Lo simbolizamos con Z.

Z = {……– 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4,…..}

$Z = N \cup \{0\} \cup Z^-$

Propiedades de Z:

1. El conjunto Z es infinito
2. El conjunto Z no tiene ni primero ni último elemento
3. Todo número entero tiene un antecesor y un sucesor
4. Entre dos números enteros hay un número finito de números enteros. Se dice que Z es discreto

Nota: La suma y diferencia de dos números enteros es otro entero (valen las leyes de cierre para suma, diferencia y producto) pero no ocurre lo mismo con la división de dos números enteros, por ejemplo 2:5 no tiene solución en este conjunto (no vale la ley de cierre para la división), por lo tanto ecuaciones del tipo $4x + 1 = 6$ no tienen solución en Z, de allí la necesidad de introducir un nuevo conjunto de números.

<u>Conjunto de los Números Racionales (Q)</u>

Es el conjunto de números formado por aquellos números que pueden expresarse como cociente de dos números enteros, como una fracción. Es decir:

$$a \in Q \text{ si } a = \frac{b}{c} \text{ con } b \text{ y } c \in Z \wedge c \neq 0$$

A este conjunto lo simbolizamos con Q.

$Q = Z \cup$ Fraccionarios

Los números naturales y enteros son racionales con denominador 1.

Propiedades de Q:

1. Q es infinito
2. El conjunto Q no tiene ni primero ni último elemento
3. Entre dos números racionales existen infinitos números racionales, entonces se dice que Q es denso.

<u>Transformación de una Fracción en una Expresión Decimal</u>: Se divide numerador por denominador. Si el resto es 0, la expresión será decimal exacta (por ejemplo 2/5 = 0,4), caso contrario, la expresión será periódica, en la cual se repiten indefinidamente alguna o algunas cifras decimales llamadas "período"(por ejemplo 1/3 = 0,3333…, se expresa $0,\overset{\frown}{3}$)

Nota: El conjunto de los números racionales puede definirse también como el conjunto de los números decimales periódicos.

Existen dos tipos de expresiones decimales periódicas:

- **Expresión decimal periódica pura:** el período aparece inmediatamente después de la coma. Ejemplo: $2,33333... = 2,\overset{\frown}{3}$
- **Expresión decimal periódica mixta:** el período aparece luego de una parte no periódica que también está detrás de la coma. Ej: $1,34666666..... = 1,34\overset{\frown}{6}$

<u>Transformación de una Expresión Decimal en una Fracción</u>

A continuación se presenta algunos ejemplos del procedimiento que se realiza para determinar la fracción correspondiente a una expresión decimal:

1) Sea $x = 0,\overset{\frown}{6}$ $\quad x = 0,666...$

Multiplicando por $10 \Rightarrow 10x = 6,666....$

restando $\quad x = 0,666...$

$$9x = 6 \quad \Rightarrow x = \tfrac{6}{9} \Rightarrow x = \tfrac{2}{3}$$

2) Sea $y = 3,1\overline{28}$

$y = 3,128282828....$

multiplicando por $1000 \Rightarrow 1000y = 3128,\overline{28}$

restando $\quad 10y = \quad 31,\overline{28}$

$$990y = 3097 \;\Rightarrow y = \frac{3097}{990}$$

Para facilitar esta transformación podemos ocupar la siguiente regla:

Regla Toda expresión decimal periódica pura se puede transformar en una fracción tal que:

- El numerador se obtiene restando al número sin la coma la parte entera.
- El denominador se obtiene colocando tantos 9 como cifras periódicas tenga.

Ejemplo:

$$2,\overline{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

$$4,\overline{36} = \frac{436-4}{99} = \frac{432}{99}$$

Regla Toda expresión decimal periódica mixta se puede transformar en una fracción tal que:

- El numerador se obtiene restando al número decimal sin la coma la parte entera seguida de la parte no periódica.
- El denominador se obtiene con tantos nueves como cifras tenga el periodo seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

Ejemplos:

$$3,5\overline{4} = \frac{354-35}{90} = \frac{319}{90}$$

$$4,13\overline{678} = \frac{413678-4136}{99000} = \frac{409542}{99000}$$

<u>Fracciones Equivalentes</u>: Dos fracciones son equivalentes cuando representan el mismo número, por ejemplo $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$ y $\frac{5}{20}$ son equivalentes porque todas representan el número 0,25.

Para pasar de la primera a la segunda se multiplica numerador y denominador por 2, o por el contrario si se quiere reducir la segunda fracción a la primera se divide numerador y denominador por 2.

<u>Operaciones en Q</u>:

<u>Suma o Resta</u>: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d \pm b.c}{b.d}$

Ejemplos:

a) <u>Fracciones de igual denominador</u>: se pone el mismo denominador y se suman o restan numeradores.

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

b) <u>Fracciones de distinto denominador</u>: se obtienen fracciones equivalentes de igual denominador antes de sumar o restar

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{3} = \frac{3.3}{2.3} - \frac{5.2}{3.2} = \frac{9}{6} - \frac{10}{6} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{3} = \frac{3.3 - 2.5}{2.3} = \frac{9-10}{6} = -\frac{1}{6}$$

equivalentes

<u>Producto</u>: $\frac{a}{b} x \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

Es conveniente simplificar las fracciones a su mínima expresión y recién realizar el producto. La simplificación se hace entre numerador y denominador

Ejemplos:

$$\frac{1}{\cancel{3}_1} \times \frac{\cancel{6}^2}{\cancel{5}_1} \times \frac{\cancel{5}^1}{7} = \frac{1}{1} \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{7} = \frac{1.2.1}{1.1.7} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{\cancel{5}^1}{\cancel{25}_5} \times \frac{3}{\cancel{4}_1} \times \frac{\cancel{8}^2}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{1.3.2}{5.1.5} = \frac{6}{25}$$

<u>Cociente</u>: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a.d}{b.c}$

En este caso la simplificación se hace entre numeradores o bien entre denominadores.

Ejemplos:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{\cancel{2}^1}{3} : \frac{\cancel{4}^2}{5} = \frac{1.5}{3.2} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{\cancel{8}^2}{\cancel{9}_3} : \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{3}_1} : \frac{\cancel{15}^3}{\cancel{3}_1} = \frac{2}{3} : \frac{1}{1} : \frac{5}{1} = \frac{2.1.5}{3.1.1} = \frac{10}{3}$$

Nota: El conjunto de los números racionales no es cerrado para la radicación, por ejemplo $\sqrt{2}$ = 1,414213.. no es un número racional porque es un número decimal no periódico, no se puede expresar como una fracción, por lo tanto ecuaciones del tipo $x^2 - 2 = 0$ no tienen solución en Q. De allí la necesidad de introducir un nuevo conjunto de números.

Conjunto de los Números Irracionales (I)

Es el conjunto formado por los números que tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Lo simbolizamos con I.

Ejemplos:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213.....$$
$$\pi = 3{,}14...$$
$$\sqrt{3} = 1{,}7320508...$$

Propiedades de I:

1. I es infinito
2. El conjunto I no tiene ni primero ni último elemento
3. Entre dos números irracionales existen infinitos números irracionales, entonces se dice que I es denso.

Conjunto de los Números Reales (R)

Es el conjunto formado por la unión de los racionales y los irracionales:

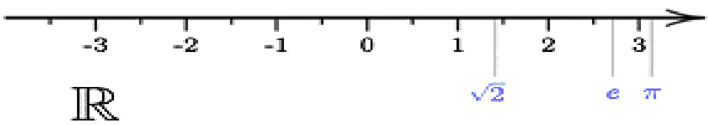
$R = Q \cup I$

Resumiendo:

$N \cup \{0\} \cup Z^{-}$ $\longrightarrow$ Enteros Z
$\cup$ $\longrightarrow$ Racionales Q
Fraccionarios $\cup$ $\longrightarrow$ Reales
R

Irracionales I

Representación Gráfica de R: Los números reales se pueden representar sobre una recta, llamada recta real, de modo que a todo número real le corresponde un punto de la recta y a todo punto de la recta le corresponde un número real.



Ley de Tricotomía: Llamamos P al conjunto de números reales mayores que cero:

$$P = \{x / x \in R \wedge x > 0\}.$$

Dado un número $a \in R$ y un conjunto P llamado positivo, tal que $P \subset R$ y P cerrado para la suma y el producto, es válida solo una de las proposiciones siguientes:

i) $a \in P$ ii) $a = 0$ iii) $-a \in P$

Orden en R: Si a y b $\in$ R, a es menor que b si se cumple que b – a es positivo.

$$a < b \Leftrightarrow b - a \in P$$

Operaciones en R. Propiedades

Las operaciones binarias usuales en R son la adición, producto, diferencia y división

Propiedades de la Adición (Suma): Sean $a, b, c \in R$

1. Ley de Cierre: $\forall$ a, b $\in$ R se cumple que $a+b \in R$
2. Ley Conmutativa: $\forall$ a, b $\in$ R se cumple que $a+b = b+a$
3. Ley Asociativa: $\forall$ a, b, c $\in$ R se cumple que $a+ (b+c) = (a+b)+c$
4. Existencia del elemento neutro para la suma:
   $\forall \ a \in R, \exists\ 0 \in R;\ a + 0 = 0 + a = a$
5. Existencia del elemento opuesto (inverso aditivo)
   $\forall\ a \in R, \exists\ - a \in R;\ a + (- a) = (- a) + a = 0$

Propiedades del Producto: Sean $a, b, c \in R$

1. Ley de Cierre: $\forall$ a, b $\in$ R se cumple que $a .b \in R$
2. Ley Conmutativa: C a, b $\in$ R se cumple que $a .b = b.a$
3. Ley Asociativa: $\forall$ a, b, c $\in$ R se cumple que $a . (b.c) = (a .b) .c$
4. Existencia del elemento neutro para el producto:
   $\forall\ a \in R, \exists\ 1 \in R;\ a . 1 = 1. a = a$
5. Existencia del elemento inverso
   $\forall\ a \in R, a \neq 0\ \exists\ a^{-1} \in R;\ a . a^{-1} = a^{-1} . a = 1$
6. Distributiva: $\forall$ a, b, c $\in$ R se cumple que $a .(b + c) = a .b + a .c$

Todo conjunto que cumple con las propiedades anteriores se denomina “Campo”, por lo tanto el conjunto de los Reales con las operaciones de suma y producto usuales constituye un campo numérico. Otros campos numéricos son los Racionales y los Complejos.

Observación: Si el producto de dos números reales es cero entonces uno de los dos números es cero.

$a, b \in R$, si $a . b = 0 \Rightarrow a = 0 \ \vee b = 0$

Reglas para la resolución de ejercicios:

- **Reglas de Supresión de Paréntesis:**

  $a + (b + c) = a + b + c$

  $a – (b + c) = a – b – c$

$a - (b - c) = a - b + c$

- **Regla de los Signos para el Producto y la División:**

$+ \,.\, + = +$	$+ \div + = +$
$+ \,.\, - = -$	$+ \div - = -$
$- \,.\, + = -$	$- \div + = -$
$- \,.\, - = +$	$- \div - = +$

- **Leyes Cancelativas y Uniformes:**

1) De la Adición: $a + b = c + b \Rightarrow a = c$ (cancelativa)

$a = c \Rightarrow a + b = c + b$ (uniforme)

2) Del Producto: $a\,.c = b\,.\,c \Rightarrow a = b$, $c \neq 0$ (cancelativa)

$a = b \Rightarrow a\,.\,c = b\,.\,c$ (uniforme)

- **Potencia en R**

Sean $a \in R$, n entero positivo, definimos $a^n = \underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,...\,.\,a}_{n\ veces} = c$

a: base de la potencia $\in \Re$

n: exponente $\in Z$

c : se denomina potencia $\in \Re$

$$Si\ a \neq 0 \Rightarrow a^0 = 1 \quad , \quad a^{-1} = \frac{1}{a} \quad y \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad Ejemplo: (4)^{-7} = \frac{1}{4^7}$$

Propiedades de la Potencia

1. Producto de potencias de igual base: $a^n \,.\, a^m = a^{n+m}$ Ejemplo: $2^3 \,.\, 2^5 = 2^7$

2. Cociente de potencias de igual base: $a^n : a^m = a^{n-m}$ si $a \neq 0$
Ejemplo: $2^9 : 2^5 = 2^4$

3. Potencia de potencia: $(a^n)^m = a^{n.m}$ Ejemplo: $(2^9)^5 = 2^{45}$

4. Distributiva de la potencia respecto del producto: $(a\,.\,b)^n = a^n\,.\,b^n$
Ejemplo: $(2\,.\,3)^5 = 2^5 .3^5$

5. Distributiva de la potencia respecto del cociente: $(a : b)^n = a^n : b^n$ si $b \neq 0$
Ejemplo: $\left(\frac{3}{5}\right)^7 = \frac{3^7}{5^7}$

Observación

La potenciación **no es distributiva** respecto a la **suma o la diferencia**. Es decir

$$\boxed{(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n}$$

- **Radicación en R**

La raíz enésima de un número real "a" es otro número "b"cuya potencia enésima es "a ".

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a, \ n \in N$$

a: se denomina radicando

n: se denomina índice del radical

- Si $a > 0 \wedge$ n es par $\Rightarrow \sqrt[n]{a} \rangle 0$ (resultado positivo). Ej: $\sqrt[4]{16} = 2$
- Si $a < 0 \wedge$ n es par $\Rightarrow \sqrt[n]{a} \Rightarrow \nexists$ (no existe solución real) Ej: $\sqrt{-4} \notin R$
- Si $a > 0 \wedge$ n es impar $\Rightarrow \sqrt[n]{a} \rangle 0$ (resultado positivo) Ej: $\sqrt[3]{8} = 2$
- Si $a < 0 \wedge$ n es impar $\Rightarrow \sqrt[n]{a} \langle 0$ (resultado negativo) Ej: $\sqrt[5]{-32} =$ -2
- La radicación puede expresarse como potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Propiedades de la Radicación:

1. Raíz de un producto es igual al producto de sus raíces: $\sqrt[n]{a \,.\, b} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$
2. Raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. Raíz de raíz es igual a la raíz del número cuyo índice es el producto de los índices dados:

   $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$ o $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}.\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n.m}}$

   Ej: $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[15]{a}$

4. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ o $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = a^{m.\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$

La radicación **no es distributiva** respecto a la **suma o la diferencia**. Es decir:

$$\boxed{\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}}$$

¡Cuidado al simplificar!

Si tenemos una potencia, como radicando en una raíz de índice par, podemos escribir: $\sqrt{(-2)^2} = (-2)^{2.1/2} = -2$ que es equivalente a simplificar índice con exponente y esto **no es correcto** porque si operamos sin simplificar, el resultado obtenido es **2 (positivo)**

- **<u>Operaciones con Radicales</u>:**

1. <u>Extracción de Factores fuera del Radical</u>: Para extraer un factor fuera del radical se divide el exponente del factor por el índice, el resultado es el exponente del factor fuera del radical y el resto de la división es el exponente del factor que queda dentro del radical.

Ejemplo: $\sqrt[3]{p^{10}.q^9} = q^3.p^3\ \sqrt[3]{p}$

$\sqrt[5]{a^{16}.b^3} = a^3\ \sqrt[5]{a.b^3}$

Nota: Si se quiere introducir un factor dentro del radical se realiza el proceso inverso: se multiplica el exponente del factor por el índice, el resultado es el exponente del factor dentro del radical

2. <u>Racionalización de Denominadores</u>: Dada una fracción cuyo denominador sea un radical, racionalizar dicho denominador es transformar la fracción dada en otra equivalente a la primera, en cuyo denominador no figuren radicales.

<u>1º Caso</u>: Cuando figura un solo radical en el denominador, se multiplica y divide por una raíz con el mismo índice, y el exponente del radicando es la diferencia entre el índice y el exponente del radical original.

Ejemplos:
$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{x\ .\ \sqrt{2}}{\sqrt{2}\ .\ \sqrt{2}} = \frac{x\ .\ \sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{x\ .\ \sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{x}{\sqrt[8]{m^5}} = \frac{x.\sqrt[8]{m^3}}{\sqrt[8]{m^3}} = \frac{x.\sqrt[8]{m^3}}{\sqrt[8]{m^5.m^3}} = \frac{x.\sqrt[8]{m^3}}{\sqrt[8]{m^8}} = \frac{x.\sqrt[8]{m^3}}{m}$$

<u>2º Caso</u>: Cuando se tiene un binomio con radicales en el denominador de la fracción, se multiplica y divide por el binomio conjugado (cambia el signo)

Ejemplos:
$$\frac{5}{\sqrt{3}-a} = \frac{5.\left(\sqrt{3}+a\right)}{\left(\sqrt{3}-a\right).\left(\sqrt{3}+a\right)} = \frac{5.\left(\sqrt{3}+a\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - a^2} = \frac{5.\left(\sqrt{3}+a\right)}{3-a^2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{3.\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right).\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = \frac{3.\sqrt{6}+3.\sqrt{2}}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3.\sqrt{6}+3.\sqrt{2}}{6-2} = \frac{3}{4}.\sqrt{6}+\frac{3}{4}.\sqrt{2}$$

- **<u>Relación de Menor</u>:** $\forall a,b,c \in \Re$
    1. En la adición: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
    2. En el producto: $a < b \ \wedge c > 0 \Rightarrow a \,.\, c < b \,.\, c$

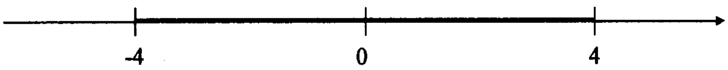
       $a < b \ \wedge c < 0 \Rightarrow a \,.\, c > b \,.\, c$ (se invierte la desigualdad)
    3. En el cociente: $a < b \ \wedge c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

       $a < b \ \wedge c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ (se invierte la desigualdad)

- **<u>Valor Absoluto</u>:** Se define valor absoluto de un número real a:

$$|\,a\,| = \begin{cases} a \ \text{si} \ a > 0 \\ 0 \ \text{si} \ a = 0 \\ -a \ \text{si} \ a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo: $|\,4\,| = 4$ y $|-4\,| = 4$



- **<u>Propiedades del Valor Absoluto</u>:**

1) $|\,a\,| \geq 0$

2) $|\,a\,| = |-a|$

3) $|\,a \,.\, b\,| = |\,a\,| \,.\, |\,b\,|$

4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|\,a\,|}{|\,b\,|}$

5) $|\,a + b\,| \leq |\,a\,| + |\,b\,|$

6) $|\,a - b\,| \geq |\,a\,| - |\,b\,|$

7) $|\ x\,| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

8) $|\,x\,| \geq a \Rightarrow x \leq -a \vee x \geq a$

- **<u>Intervalos Reales</u>**: Un intervalo real es un subconjunto de R y se representa como un segmento de la recta real.

Sean a , b $\in$ R, tal que a < b, se define:

- Intervalo Cerrado [a, b]:

$[a, b] = \{x/x \in R \wedge a \leq x \leq b\}$

- Intervalo Abierto (a, b):

$(a, b) = \{x/x \in R \wedge a < x < b\}$

- **Intervalo Semiabiertos o Semicerrados**:

$[a, b\ ) = \{x/x \in R \wedge a \leq x < b\}$

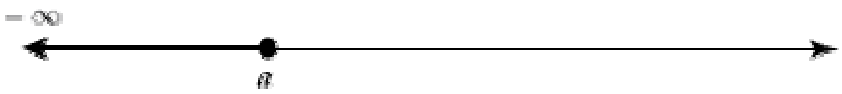
$(a\ , b\ ] = \{x/x \in R \wedge a < x \leq b\}$

- **Intervalos sin Cota Inferior o Superior**

$(\ a, \infty\ ) = \{x/x \in R \wedge x > a\}$

$[a, \infty\ ) = \{x/x \in R \wedge x \geq a\}$

$(-\infty, a] = \{x/x \in R \wedge x \leq a\}$



$(-\infty, a) = \{x/x \in R \wedge x < a\}$